講義録に対する学生諸君からの質問と答え

$\boxed{\text{質問 1}}$ 第 6 回講義内容の 1 ページ目、定義 4.1 についてですが、「テイラー展開可能とは n を無限大に飛ばしたとき、剰余項 R_n がゼロに収束することである」とありますが、R_n のうち一つでもゼロに収束すれば、他の剰余項については調べなくてもよいのでしょうか？

例えば、Lagrange の剰余項がゼロに収束することがわかったとします。このとき、Cauchy の剰余項がたとえゼロに収束しなくてもよいのでしょうか？それとも、Cauchy の剰余項も必ずゼロに収束すると断言できるのですか？「講義では剰余項の $R_n =$（以下略）なる表示をとったので差し当たり詰まったのであった。」（同 2 ページ）とあることから 1 つの剰余項で証明できなくても、別の剰余項で証明できればそれで良いのか、1 つの剰余項では「容易には」証明できなくても、別の剰余項では「容易に」証明できるのどちらかだと考えたのですが‥私の考えは合っているでしょうか？

$\boxed{\text{答え}}$：それで合っています。即ち、『ある剰余項の表現では「容易には」証明できなくても、別の剰余項表現ならば「容易に」証明できる』ということです。

定義 0.1 (Taylor 展開) 関数 $f \in C^\infty(I)$ が $x = c$ で *Taylor* 展開可能とは、*Taylor* の定理の剰余項について

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

が成立することである。このとき、

$$f(x) = \sum_j^\infty \frac{1}{j!} f^{(j)}(c)(x-c)^j$$

と書き、これを *Taylor* 級数と言い、この級数を求めることを、関数 f を $x = c$ で *Taylor* 展開するとも言う。また、$c = 0$ としたものを、*Maclaurin* 級数とも言う。

注意：ここで $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ を示すとき、Taylor の定理における各種の剰余項の表示を用いる。以下に

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^\infty x^k \quad (-1 < x < 1)$$

を例にとって説明する。

$f(x) = (1-x)^{-1}$ より簡単に $f^{(m)}(x) = m!(1-x)^{-(m+1)}$ となる。即ち、$f^{(m)}(0) = m!$ で

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + R_n \quad (-1 < x < 1)$$

となる。ここで剰余項 R_n の表示として

$$R_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-1}x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta_1 x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta_2 x) \tag{1}$$

を考えよう。ここで θ_1, θ_2 は x, n に依るが、どう依存しているかについて、$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ 以上の詳しい性質はこの段階ではわからないのです。

(1) の最初の表示を用いると、$|1 - \theta_1 x| \geq 1 - \theta_1 |x|$ に注意し

$$|R_n| \leq \left| \frac{(1-\theta_1)^{n-1}x^n}{(n-1)!} n!(1-\theta_1 x)^{-(n+1)} \right| \leq \frac{n|x|^n}{(1-\theta_1 x)^2} \left| \frac{1-\theta_1}{(1-\theta_1|x|)} \right|^{n-1}$$

となる。簡単に $0 < (1-\theta_1)/(1-\theta_1|x|) < 1$ なることは分るから $|x| < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} n|x|^n = 0$ を用いて、$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となる。

(1) の 2 番目の表示 $R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta_2 x)$ を用いると、

$$|R_n| = \left| \frac{x^n}{n!} \frac{n!}{(1-\theta_2 x)^{n+1}} \right| = \frac{x^n}{(1-\theta_2 x)^{n+1}} = \frac{1}{1-\theta_2 x} \left(\frac{x}{1-\theta_2 x} \right)^n$$

となる。ところで、θ_2 は x と n にどう依存しているのか分らず、$0 < \theta_2 < 1$ だけでは $|\frac{x}{1-\theta_2 x}| < 1$ が保証されないのです。しかし、どちらの表示も同じ R_n を表現しているのですから、どれかの表示で 0 に収束することが証明できれば良いのです。

$\boxed{\text{質問 2}}$ 長方形領域って何ですか？第 7 回講義内容「2 変数関数におけるテイラー展開」、第 8 回講義内容「極大値、極小値を求める一つの方法」のはじめに「長方形領域 $I \times J$ で定義された関数」とありますが、これは「x の定義域が I、y の定義域が J である (x, y) の組」という理解でよいのでしょうか？

$\boxed{\text{答え}}$：そうです。$I \times J = \{(x, y) \mid x \in I,\ y \in J\}$ と「定義」し、直積区間とも言いますが、図示すれば長方形になります。

$\boxed{\text{質問 3}}$ 負定値行列って何ですか？$f_{xx} < 0$ かつ $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$ ならば関数 $f(x, y)$ が極大値を取るのは理解できましたが、負定値行列というものがよくわかりません。

$\boxed{\text{答え}}$：これは何回か説明しましたが、もう一度下の部分を読み返して下さい。

定義 0.2 $n \times n$-行列 $A = (a_{ij})$ が負定値行列であるとは、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\}$ に対して

$$\xi \cdot A\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \Big) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j < 0$$

となることである。

特に $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が負定値行列となる必要十分条件は

$$a < 0,\ c^2 - ab < 0$$

である。実際、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\xi_1(a\xi_1 + c\xi_2) + \xi_2(c\xi_1 + b\xi_2) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2 < 0$$

となるための条件は、$a < 0,\ c^2 - ab < 0$ である。

$\boxed{\text{質問 4}}$ 第 8 回講義内容の 2 ページ目の「証明」ですが、何を証明しようとしているのかがわかりません。サブタイトルが「テイラーの定理の証明」なのですが、これでテイラーの定理の証明になっているのですか？

$\boxed{\text{答え}}$：そうです、テイラーの定理は平均値の定理の拡張ですから、これが証明なのです。実際、$n = 1$ が平均値の定理で、それの証明は Rolle の定理に帰着させれば良かったことを思い出して下さい。即ち、

定理 0.1 (Rolle の定理) 区間 $[a, b]$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b)$ を満たすならば、

$$f'(c) = 0$$

となる点 $c \in (a, b)$ が少なくとも一つ存在する。

証明：最大値をとる点での右微分と左微分を考えれば良いことを講義で説明した。

定理 0.2 (平均値の定理) 区間 $[a,b]$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対し、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

となる点 $c \in (a,b)$ が存在する。

証明：補助関数 φ を $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ と定める。$\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$ で φ は区間 $[a,b]$ で微分可能だから、Rolle の定理を用いて、$\varphi'(c) = 0$ なる点 $c \in (a,b)$ がある。ということは、$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

そこで、補助関数

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A(x-a)^n$$

とし、 Rolle の定理を適用できるように A を定めれば良いのです。講義録のこの続きをもう一度読んで下さい。そこで、補助関数の最後の項 $A(x-a)^n$ を別の形 $A^{\{j\}}(x-a)^j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ にすると異なる剰余項の表示が得られることが説明されています。その剰余項の表示は $x, c, \theta^{\{j\}}$ に依るのですからを $R_n^{\{j\}}(x, c, \theta^{\{j\}})$ と書けば、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(c) + R_n^{\{j\}}(x, c, \theta^{\{j\}})$$

となります。だから、勿論 $R_n^{\{j\}}(x, c, \theta^{\{j\}})$ の値はすべて同じ なのです。

＝＝＝＝＝＝

私の体調を心配してくれる記述が中間試験の感想にも幾つかありました。どうも有難う、緊急入院させられガンと宣言されましたが、生体検査の結果ガン細胞は発見されず、1ヶ月後の再検査でも危険な徴候はなかったのですから、ここ当分は大丈夫でしょう。