微分積分学第一　Ｖ類Ｔ組 第 11 回講義内容（2005 年 7 月 7 日）井上淳

7　1 変数関数の積分法

7.1　積分の定義

7.2　定積分の性質について

7.3　微積分の基本定理

7.4　幾つかの計算例

7.5　線積分 （1 変数定積分の応用例）

8　不定積分、そして微分方程式

ここで、前々回の講義で言及した 2 つの定義をもう一度眺めてみよう。

定義 8.1 （記述的 [*descriptive*] 積分の例）$[a,b]$ 上の実数値関数 f が *Newton* 可積分とは、$[a,b]$ 上微分可能な関数 F があって任意の $x \in [a,b]$ で $F'(x) = f(x)$ となるときをいう。ここで、F を f の原始関数 *(primitive, anti-derivative)* といい、f の $[a,b]$ 上の積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値が $F(b) - F(a)$ である。

これは Newton が考え、用いていた概念であり、与えられた f に対し $F' = f$ なる F を求めているとも考えられる。
この講義では、まず Riemann による次の積分を定義した。

定義 8.2 （構成的 [*constructive*] 積分の例）$[a,b]$ 上の実数値関数 f が *Riemann* 可積分で積分値 A を持つとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$[a,b]$ の分割 $\mathcal{D}$ と目印点 Ξ を

$$\mathcal{D} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad と \quad \Xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\} \quad を \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad \max_{i=1,\cdots,n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$$

なるように任意にとると

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\Big| < \epsilon$$

となることをいう。$A = \int_a^b f\,dx$, 或いは $A = \int_a^b f(x)dx$ 等と記す。

それから不定積分を定義し、微分積分学の基本定理を用いて、最初に述べた Newton 可積分との関連をつけた。多くの教科書では、「いきなり原始関数を定義し例えば任意の有理関数の原始関数を求める」ようにしているのは、「歴史的経過」を考えての事だろう。しかし、いきなり「原始関数ありといっても、どうして？」となるだろうから、私はこのように構成的積分論を先に説明するようにしてきたのである。

この講義の最初に述べた今後の予定では、今学期中に高次元 Riemann 積分についても述べるとしたが、不定積分の計算についてはもう少し述べる必要がある。結果として、今学期中には微分方程式にちょっと触れるというところまでになるだろう。

集合の演算：上の定義で、区間 $I = \cup_{j=1}^{n} I_j,\ I_j = [x_{j-1}, x_j]$ という記号を用いた。2 つの集合 A, B に対して、その 2 つの合併（或いは和）$A \cup B$ と共通部分（或いは積）$A \cap B$ という集合の演算について述べた。何故それを和とか積とかいうかの説明もしたが、ここには記載しない。

ギリシャ文字について：ξ はギリシャ文字でクシーと読むということが知られていなかった。それについて以下に説明する。

表 1: ギリシャ文字（大文字、小文字）とその読み方

A	α	アルプァ	B	β	ベータ	Γ	γ	ガンマ
Δ	δ	デルタ	E	ϵ, ε	イプシロン	Z	ζ	ゼータ
H	η	エータ	Θ	θ, ϑ	テータ	I	ι	イオタ
K	κ	カッパ	Λ	λ	ラムダ	M	μ	ミュー
N	ν	ニュー	Ξ	ξ	クシー	O	o	オミクロン
Π	$\pi,\ \varpi$	パイ	P	$\rho,\ \varrho$	ロー	Σ	σ, ς	シグマ
T	τ	タウ	Υ	υ	ユプシロン	Φ	ϕ, φ	フィ
X	χ	カイ	Ψ	ψ	プサイ	Ω	ω	オメガ

表 2: ギリシャ文字（大文字）とその読み方

$\mathit{\Gamma}$	ファガンマ	$\mathit{\Delta}$	ファデルタ	$\mathit{\Theta}$	ファテータ	$\mathit{\Lambda}$	ファラムダ
$\mathit{\Xi}$	ファクシー	$\mathit{\Pi}$	ファパイ	$\mathit{\Sigma}$	ファシグマ	$\mathit{\Upsilon}$	ファユプシロン
$\mathit{\Phi}$	ファファイ	$\mathit{\Psi}$	ファプサイ	$\mathit{\Omega}$	ファオメガ		

アンチコンピュータ派：ものを書くとき、コンピュータを使わず、専ら自筆派の人がいて「アンチコンピュータ派」と称していた。その人には、柳田邦男「壊れる日本人—-ケータイ・ネット依存症への告別」（新潮社）という話題の本の一読をすすめる。しかし、「アンチコンピュータ派」というのが「建前」であって本当は学ぶのが面倒だし上手く使えないので、虚勢を張ってそう言っているのでないといいのだが？実はコンピュータ等は朝飯前に使えるのだが、柳田のいう「人間らしさ」を回復したいので、それを使わず自筆を通しているとなると「恰好が良い」のだがなー。

8.1 不定積分の計算法

定義 8.3 関数 $f(x)$ に対して、同じ定義域をもつ関数 $F(x)$ で $F'(x) = f(x)$ を満たすものを $f(x)$ の原始関数[1]という。或いは、関数 $f(x)$ は原始関数 $F(x)$ を持つという。

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると、$F(x) + C$ (C は x に関し定数) も $f(x)$ の原始関数であるから、原始関数は一つとは限らない。

例：見かけは全く異なるが、同じ関数の原始関数となる典型例として、

$$\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad \frac{-2}{t^2+1} \qquad \because)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{-2}{t^2+1}\right)$$

[1] primitive とか anti-derivative という。日本での慣用として、不定積分ともいう。また、**「f の原始関数を求める」とはいわず「f を積分する」**ということが多い

をあげておこう。以下に別の計算もしておこう：

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1 + \frac{-2}{t^2+1}, \text{ 即ち, } \frac{t^2-1}{t^2+1} - \frac{-2}{t^2+1} = 1 = t \text{ に関し定数}$$

この例よりも推測できるように、以下が成立する。

定理 8.1 $F(x)$ が $f(x)$ の一つの原始関数であるとき、$F'(x) = f(x)$ となる一つの区間で、$f(x)$ のすべての原始関数は $F(x) + C$ (C は定数) と表される。

証明：G も $f(x)$ の一つの原始関数とすると、$(G-F)' = 0$ となる。これは、$G-F$ が一つの区間上で定数なることを意味する。 □

定理 8.2 （積分の線形性）関数 F, G を f, g の原始関数、α, β を定数とすると、

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

（証） これは $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$ より従う。

定理 8.3 （置換積分法）関数 F を f の原始関数とするとき、微分可能な関数 $x = \varphi(t)$ に対し、

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

（証） $F'(x) = f(x)$ なる $F(x)$ と $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ なる $G(t)$ をとる。$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$ だから、$(F(\varphi(t)))' = G'(t)$。

注意：上式の左辺を右辺の形で表すことを、積分変数 x を t に変換するという。この置換積分公式は、変数変換 $x = \varphi(t)$ の微分を形式的に $dx = \varphi'(t)dt$ と書いて、$x = \varphi(t)$ とともに左辺に代入したものと考えれば覚えやすい。しかし、dx/dt は微分として定義したが、dx, dt については現時点では全く形式的に導入しただけである。

例：$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \ (a > 0, \ |x| < a).$

（証） 変数変換 $x = a\sin t \ (-\pi/2 < t < \pi/2)$ より

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t, \quad dx = a\cos t\, dt$$

だから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int 1dt = t = \arcsin\frac{x}{a}. \qquad \square$$

定理 8.4 （部分積分法）f, g を微分可能な関数とする時、$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

基本的な関数の原始関数[2]：

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x|,$$

[2]以下は覚えておくと便利だが、試験時にはこの表をつけておくので 無理に暗記しようとは思わないで欲しい

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0,\, a \neq 1).$$

$$\int \log|x| dx = x\log|x| - x,$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)| \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a \neq 0),$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log|x + \sqrt{x^2+A}| \quad (A \neq 0),$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|) \quad (A \neq 0).$$

上式は、右辺を微分して左辺の被積分関数が表れることを示せば良い。しかし、左辺から如何にして右辺の関数をつくり出すのかは、必ずしも容易ではない。

例題 1 (教科書 P.96)：$a^2+b^2 \neq 0$ として

$$I = \int e^{ax}\cos(bx)dx, \quad J = \int e^{ax}\sin(bx)dx,$$

を求めよ。

解：$a \neq 0$ の場合、部分積分して

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}J, \quad J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}I,$$

となる。これを解いて、

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)), \quad J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos(bx) + a\sin(bx)).$$

$a = 0,\, b \neq 0$ のときも成り立つ。　□

例題 2：$I_m = \int \frac{dx}{(x^2+A)^m}$ $(A \neq 0)$ と置くと、$m \neq 1$ のとき、

$$I_m = \frac{1}{2A(m-1)}\left\{\frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\} \tag{1}$$

なる関係式[3]が成立する。

[3]漸化式という

証明：簡単な変形と部分積分で

$$
\begin{aligned}
I_m &= \frac{1}{A}\int \frac{(x^2+A)-x^2}{(x^2+A)^m}dx = \frac{1}{A}I_{m-1} - \frac{1}{2A}\int x\frac{2x}{(x^2+A)^m} \\
&= \frac{1}{A}I_{m-1} + \frac{1}{2A(m-1)}\frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} - \frac{1}{2A(m-1)}I_{m-1}
\end{aligned}
$$

となる。これより、求める関係式が従う。また、

$$
I_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| & (A=-a^2<0), \\ \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} & (A=a^2) \end{cases} \tag{2}
$$

となるから、$I_j(j=2,3,\cdots)$ が次々に求まる。 □

8.2 有理関数の不定積分

8.2.1 有理関数の原始関数の求め方

命題 8.1 有理関数の原始関数を求める事は、次の形の不定積分を求める事に帰着される。

$$
\int \frac{dx}{(x+\alpha)^m}, \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}.
$$

証明：$Q(x)$ を $P(x)$ で割った時の商を $g(x)$、余りを $Q_0(x)$、即ち

$$
Q(x) = g(x)P(x) + Q_0(x), \qquad Q_0(x) \text{ の次数} < P(x) \text{ の次数}
$$

とすると、

$$
f(x) = g(x) + Q_0(x)/P(x)
$$

と書ける。勿論、$g(x)$ は多項式だからその原始関数はすぐ求まる。故に上の命題は

$$
f(x) = Q(x)/P(x), \qquad Q_0(x) \text{ の次数} < P(x) \text{ の次数}
$$

の場合について考えれば良い。さて、代数学の基本定理より

$$
P(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{n_2}\cdots
$$

と因子分解される (但し、$\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$)。故に

$$
f(x) = \sum_k \left\{ \sum_{l=1}^{m_k} \frac{A_{k,l}}{(x+\alpha_k)^l} \right\} + \sum_k \left\{ \sum_{l=1}^{n_k} \frac{B_{k,l}x + C_{k,l}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^l} \right\}
$$

となるように、係数 $A_{k,l}$,$B_{k,l}$,$C_{k,l}$ を決められる。実際、係数を未定とした最後の式を通分し、$Q(x)$ と比較して、x の次数に応じて順に決めていけば良い[4]。更に

$$
\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^m} = \frac{B}{2}\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^m} + \left(C - \frac{\beta B}{2}\right)\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}
$$

となるから、命題は示された。 □

注意：この命題と(1)、(2) を用いて有理関数の不定積分は求まった！

[4] これについて講義中に「分らない」というサインがあって説明したつもりだが、見当がついただろうか？必要ならばもう一度説明する

＝＝

メモ：最初は 40 名程か、最終的には 70 名前後の受講者。

中間試験時の意見の中に、講義室として大きすぎるし TV での黒板への板書も見にくく受講に具合が悪いという意見があった。原則として教務は履修申請者に応じた大きさの講義室を用意するのだが、このクラスはもともと階段教室に割り振られていた。しかし階段教室は講義がしにくいとフラットな部屋を希望した結果、この講義室を提示された。履修申請者は 110 名程度だが、実際 80 名前後の受講者しかいないのだから、それらの人々が聞き易い講義室を要請し、110 名程度収容可能という条件をはずして貰うつもりである。万が一、その教室に全員座れなくても仕方がないとしよう！