微分積分学第二　Ｖ類Ｔ組 第13回講義内容（2005年7月21日）井上淳

中間試験答案返却！

7月28日（木）は期末試験実施！

場所：W241、　時間：15時00分から18時10分まで

7　1変数関数の積分法

8　不定積分、そして微分方程式

8.1　不定積分の計算法

8.2　有理関数の不定積分

8.2.1　有理関数の原始関数の求め方

8.2.2　三角関数、無理関数、指数関数等を含んだ有理関数の不定積分

8.3　微分方程式にちょっと触れよう

もともと Newton(1642-1727) はその当時考えられていた物体の質量 m や外力としての物体に加わる力 f とその物体の運動の関係から、力学を展開したはずである（私は「プリンキピア」を読んでいない）。

物体の位置を $x(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ とすると外力 $f(t) = {}^t(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ を与えたときの物質の加速度 $\alpha(t) = {}^t(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ は質量を m として

$$m\alpha(t) = f(t), \quad \alpha_j(t) = \frac{d^2}{dt^2}x_j(t)$$

となるとした。これが Newton の運動方程式であり、この考えから Copernicus(1473-1543)、Galilei(1564-1642)[1]、Kepler(1571-1630) 等の天体運動に関する法則を数学的に導きだした。

数学的振り子の方程式：重力の作用を受けながら、鉛直な平面内にある半径 ℓ の円周 K 上を運動する質量 m の点 p を、数学的振り子といい値 ℓ は振り子の長さと言われる。円周 K の最低点を座標の原点 0 にとり、円周上に角座標を導入し、時刻とともに変化する点 p の座標を $\varphi = \varphi(t)$ で表す。点 p は鉛直下向きの重力 $P = mg$ の作用を受ける。この力の法線方向の成分は点 p を円運動させるための束縛力（= これは角 φ が増加する方向を正として点 p における円の接線方向成分 $-mg\sin\varphi$) と等しい。これより

$$m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

となる。

[1]宗教裁判で異端と判定され「それでも地球は廻っている」と言ったとかいう逸話は真偽の程はともかく良く知られていよう。その Galilei の名誉回復が 350 年振りになされた

電気回路の方程式は、その電気的な意味合いは説明できないが、Kirchhoff の法則から導かれるという。これは専門課程で十分学んで欲しい。多くの電気回路や複雑な機械装置などのブラックボックスは一つの方程式

$$\ddot{x}(t) + p(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + q(x(t)) = f(t)$$

に支配されていると考えられる（らしい？）。

● 微分方程式の意義：何故ここで微分方程式なる概念が出てきたか？前に述べたように、関数 f が区間 $[a, b]$ 上で積分可能な時 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおくと、これは関数 f の不定積分と呼ばれ次のような性質を持つ。

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x), \quad F(a) = 0.$$

これは与えられた「関数 f に対し、上の関係式を満たす関数 F を探す操作が、関数 f の不定積分を求めるということであった」事を意味する。一般に上のような関係式を**微分方程式**、それを満たす関数を求める操作を**微分方程式を解く**という。

◎ 宇宙の始まりビッグバンがあったと言う事を物理学者集団は信じているようだ。何故、素面のままで、１年先の事も分からないはずの人間と言う種が、そんな何億年前の事柄を推定できるのであろうか？

◎ また、ハレー彗星を見つけたとされるハレーは人生の間に高々２回しか巡り会った事のないはずの流れ星がまた８０年後？かに現れると何故言えたのであろうか？

◎ 薬学界では、患者がでたとき直ちにその病気に応じた薬を創り出す、という状況になるだろうと思われているようだ。もしそうなると、患者個別に薬を創り出すと言う事で、今迄のように製薬会社が多くの試料を組み合わせて薬を作り出すと言うような事はできなくなる。少なくとも可能性のある試料の組合せを絞り込むのに化学実験をしてはいられなくなるだろう。一つの方向に、computational chemistry なるものがある。今迄のように、６角形とか８角形とかのベンゼン核とか炭素核？とかが苦手とか、微分方程式とか数学が苦手とか、それぞれ言っている場合では無さそうである。化学反応を数学的に表示しそれを computer を用いて近似的に計算して、化学実験の替わりとすることになるようだからだ。

◎ 非圧縮生粘性流体の方程式として方程式の初期境界値問題を書き上げ、これを用いて同心円柱の間の流体の極めて特徴的な流れの数学的考察ができること、木星の縞模様も同じ現象として説明できるのだろうか？

これらができる源泉は、紙の上に書いた微分方程式の解の性質にあるとしたら、君たちはどうするかなあー!

定義 8.1 (微分方程式の定義) x を独立変数とする未知変数 y 及びその導関数 $y', y'', \cdots$ を含んだ方程式 $F(x, y, y', \cdots) = 0$ を（常）微分方程式という。また、このような関数 $y(x)$ を微分方程式 $F(x, y, y', \cdots) = 0$ の解という。F に含まれる y の導関数の最大階数をその方程式の階数と呼ぶ。

用語：n 階の微分方程式の**解**で、n 個の任意定数を含むものを**一般解**、任意定数の一部またはすべてに値を代入して得られる解を**特殊解**、一般解でも特殊解でもない解を**特異解**と呼ぶ。

注意：A 地点から（誘導装置のない）ペンシル型ロケット[2]を発射して B 地点を爆破するためには、どういう角度でどういうスピードで発射したらよいか？これは微分方程式に「境界条件をつけた問題」として捉えられる。しかし、この節では、境界条件を考慮に入れた問題を扱わず、ひたすら、関数 $y(x)$ で $F(x, y, y', \cdots) = 0$ を満たすものを探す方法の易しい例、解が具体的に求まる[3]微分方程式、についてのみ言及する。ところで初等関数とは何か？

定義 8.2 有理関数、指数関数、三角関数から *(i)* 加減乗除、*(ii)* 逆関数をとる、*(iii)* 合成する、以上の三つの操作を有限回施して得られる関数を初等関数[4]という。

[2]糸川秀夫氏達の苦労を NHK の「プロジェクト X」で見て、元気付けられるのも、またよし
[3]例えば、初等関数を用いて書き表せる
[4]無理関数、対数関数、逆三角関数もこれに含まれる

注：一見馴染み深い、$y = \cos x - x$ の逆関数や不定積分 $\int e^{-x^2}dx$ は**初等関数にならない**ことは分かっている。

まずは、簡単な微分方程式として以下を考える事にする。

（い）**変数分離型、同次型**：$y' = f(x)g(y)$ なる形のものを、変数分離型といい、

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

として、直ちに解が求まる。といっても、上式左辺は y の関数 $G(y)$、右辺は x の関数 $F(x)$ だから、関数 $H(x, y) = G(y) - F(x) = 0$ を y について解いて[5]解 $y = y(x)$ が求まることになる。

$y' = f(y/x)$ なる形のものを、同次型といい、$y/x = u$ と変数変換すれば $u' = (f(u) - u)/x$ なる変数分離型に帰着される。

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

とし、最後に $y/x = u$ とおき、y を x で表せば良い。

（ろ）**１階線形微分方程式**：$y' + P(x)y = Q(x)$ の場合、まずは同次方程式 $y' + P(x)y = 0$ を考える。これは単純な変数分離型で直ちに解けて、C_1 を任意の定数として $y(x) = C_1 \mathrm{exp}\Big(-\int P(x)dx\Big)$ が解を与える。$Q(x) \not\equiv 0$ のときは、C_1 をあたかも x の関数のように思い計算すると、

$$C_1' \mathrm{exp}\Big(-\int P(x)dx\Big) = Q$$

が分かるから

$$y(x) = \mathrm{exp}\Big(-\int P(x)dx\Big)\Big\{\int \Big[Q(x)\mathrm{exp}\Big(\int P(x)dx\Big)\Big]dx + C\Big\}$$

となる。このように定数をあたかも x の関数のように思い直して非同次方程式の一般解を求める方法を、**定数変化法**という。

（は）**２階線形微分方程式**：関数 $p_1(x), p_2(x), q(x)$ を与え、２階線形微分方程式[6]

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

を考える。この解を $p_1(x), p_2(x), q(x)$ を用いて、１階線形微分方程式のように表示することは、一般にはできていない。

そこで、定数係数 $p_1(x) = a,\ p_2(x) = b\ (a, b \in \mathbb{R})$

$$y'' + ay' + by = q(x) \tag{1}$$

の場合を考える。このためにも少々準備が必要である。

複素数値の関数：複素数とは何か？については一応分かっているもの[7]としよう。実変数 t の複素数値関数 $z = z(t)$ は

$$z(t) = u(t) + iv(t), \quad u(t) = \Re z(t), v(t) = \Im z(t)$$

と二つの実数値関数の組み $(u(t), v(t))$（実部、虚部という）で表される。

[5] ここに、陰関数の定理を用いる

[6] Newton の創案した力学では、物体に加える力と物体の位置の時間に関する２階微分が比例するとするので、２階微分方程式が必然的に出現する。考えている力学系の平衡点の近くでの動きは２階線形微分方程式で記述されると考えられているが、これについては、「微分方程式論」に任せよう

[7] もし「本当は分かった気がしない」ならば恥ずかしがらず質問しよう。その時の教官の対応で、「この教官はどういう考え方の下にここで講義しているのか？」が推察できるし、退屈しないで済むのでは。ところで、複素数には大小関係があるのだろうか？

複素数値関数 $z(t)$ の微分、積分は次式で定義する。

$$z' = u' + iv', \quad \int zdt = \int udt + i\int vdt$$

また、複素数 $\lambda = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して

$$e^{\lambda} = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos\, a + i\sin b)$$

となる[8]。

問：複素数 $\lambda = a + ib$ に対し

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad \int e^{\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}$$

が成立することを、確かめよ。

まず、$q(x) \equiv 0$ なる同次方程式、或いは、斉次方程式ともいう、

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

を解こう。$e^{\lambda t}$ なる形の関数が(2) を満たしているならば、λ は

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

とならなければならない。この方程式 $\Phi(\lambda) = 0$ を特性方程式、その根を特性根といい、それらを $\lambda_{\pm}$ と書こう。

定理 8.1 方程式(2) の一般解は以下のようになる。

(i) $a^2 - 4b > 0$ の場合、$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$ とおく。この時、$\alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t}$ は同次方程式の解を与える。

(ii) $a^2 - 4b = 0$ の場合、方程式は $y'' + ay' + (a^2/4)y = 0$ であり、その解は $(\alpha t + \beta)e^{(-a/2)t}$ で与えられる。

(iii) $a^2 - 4b < 0$ の場合、$\mu = \sqrt{4b - a^2}$ とおくと $\alpha e^{(-a/2)t}\cos(\mu t) + \beta e^{(-a/2)t}\sin(\mu t)$ は同次方程式の解を与える。

注意：上に述べた関数が「すべての解」であるかどうか？は単に上に与えた関数達が方程式を満たしていることを調べても分からない。ここに、微分方程式の解の存在とか一意性を論ずる必要性が生じる。

（に）**非同次方程式**(1) **の解き方**：$q \not\equiv 0$ なる(1) のことを非同次方程式、或いは、非斉次方程式というがここでは詳説しないが、例を挙げておく。

例１：$y'' + 3y' + 2y = x^2 + 5$ を解く。特性方程式 $t^2 + 3t + 2 = (t + 2)(t + 1) = 0$ より、同次方程式の一般解は $\alpha e^{-2t} + \beta e^{-t}$ で与えられる。非同次項が２次多項式だから、特殊解を $y = ax^2 + bx + c$ と見積もって求めてみる。代入してみると

$$2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c = x^2 + 5$$

となるから、

$$a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{2},\ c = \frac{17}{4}$$

[8]「となる」ことは、e^x の級数展開で実変数 x の代わりに複素数 $\lambda = a + ib$ を「代入できる」ことで形式的には示される。これは、後に述べる、絶対収束する関数項級数の項で証明する

とすれば、特殊解が求まり、非同次方程式の一般解は

$$y = \alpha e^{-2t} + \beta e^{-t} + a = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}. \qquad \square$$

例 2：$y'' - 2y' + 2y = x(a\cos x + b\sin x)$ を解く。$y'' - 2y' + 2y = xe^{ix}$ について考える。特性方程式 $t^2 - 2t + 2 = (t-(1+i))(t-(1-i)) = 0$ より、同次方程式の一般解は $e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$ で与えられる。非同次項が (iv) の形だから、特殊解を $y = (\lambda x + \mu)e^{ix}$ と見積もって求めてみる。代入して計算すると

$$(\lambda x + \mu)e^{ix} = \left[\frac{1+2i}{5}x + \frac{2(1+7i)}{25}\right](\cos\, x + i\sin x).$$

となる。$y'' - 2y' + 2y = xe^{ix}$ の実部、虚部をとって

$$y'' - 2y' + 2y = x\cos\, x, \quad y'' - 2y' + 2y = x\sin x$$

また $(\lambda x + \mu)e^{ix}$ の実部、虚部をとって

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25}\right)\cos\, x - \left(\frac{2}{5} + \frac{14}{25}\right)\sin x, \quad \left(\frac{2}{5} + \frac{14}{25}\right)\cos\, x + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25}\right)\sin x$$

となる。故に与えられた方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) &+ a\left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25}\right)\cos x - \left(\frac{2}{5} + \frac{14}{25}\right)\sin x\right] \\ &+ b\left[\left(\frac{2}{5} + \frac{14}{25}\right)\cos\, x + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25}\right)\sin x\right]. \qquad \square \end{aligned}$$

例 3：$y'' + \omega^2 y = e^{at}\sin(bt)$ $(\omega, a, b > 0)$ を解く。この場合は $y'' + \omega^2 y = e^{(a+ib)t}$ について考え (v) の処方箋に従えば良い。同次方程式の一般解は $C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)$ だから、与えられた方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y &= C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) \\ &\quad + \begin{cases} e^{i\omega x}/(2i\omega) & (a = 0, b = \omega), \\ xe^{(a+ib)x}/((a+ib)^2 + \omega^2) & (a \neq 0,\ \text{或いは}\ b \neq \omega), \end{cases} \text{の虚部}. \end{aligned}$$

これより、特殊解の部分は $(a = 0, b = \omega)$ のときは、

$$-\cos(\omega x)/(2\omega),$$

$(a \neq 0,$ 或いは $b \neq \omega)$ のときは

$$xe^a(-2ab\cos b + (a^2 - b^2 + \omega^2)\sin b)/((a^2 - b^2 + \omega^2)^2 + 4a^2b^2)$$

となる。 $\square$

==============================

メモ：今学期最後の講義で、微分方程式の入門と今までの復習をする。中間試験答案の返却をするとともに感想についての感想を述べる。この教室は使いにくいので、来学期は変更してもらうことを検討中である。