

微分積分学第一 V類 T組 中間試験解答例 (2005年6月30日) 井上淳

1  $a$  を定数とする。次の方程式の解の個数を調べよ。

$$2x \arctan x - \log(1+x^2) = a$$

略解 [7]:  $f(x) = 2x \arctan x, g(x) = \log(1+x^2)$  として関数  $h(x) = f(x) - g(x)$  のグラフを書いてみる。

$$h(x) = f(x) - g(x), h'(x) = 2 \arctan x, h''(x) = \frac{2}{1+x^2},$$

$$h(x) = h(0) + h'(\theta x)x, 0 < \exists \theta = \theta_x < 1$$

だから

$$h(x) = a \text{ となる } x \text{ の個数} = \begin{cases} 0 & a < 0, \\ 1 & a = 0, \\ 2 & a > 0. \end{cases}$$

2 以下の極限を求めよ。但し、 $n$  は自然数、 $\lambda$  は実数とする。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\tan x)^{\cos x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^\lambda}.$$

略解: (1)[3]  $f(x) = (\tan x)^{\cos x}$  とおき対数をとると  $\log f(x) = \cos x \log(\tan x)$  となる。 $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$  のとき  $\cos x \rightarrow 0$  かつ  $\log(\tan x) \rightarrow \infty$  だから、これは不定形の極限である。そこで、l'Hospital の法則を用いて

$$\frac{(\log(\tan x))'}{(1/\cos x)'} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0)$$

に注意すれば  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\tan x)^{\cos x} = 1$  となる。

(2)[3]  $f(x) = x - nx^n + (n-1)x^{n+1}, g(x) = (1-x)^\lambda$  とおくと、 $n = 1$  のときは  $f(x) \equiv 0$ 。以降、 $n = 2, 3, \dots$  とし、必要ならば、l'Hospital の法則を繰り返し用いる。

$\lambda \leq 0$  のとき、 $f(x) \rightarrow 0(x \rightarrow 1-0), 1/g(x) = (1-x)^{-\lambda} \rightarrow 0(x \rightarrow 1-0)$  or  $g(x) = 1$  だから  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)/g(x) = 0$ 。

$0 < \lambda \leq 1$  のとき、 $f'(x) = 1 - n^2x^{n-1} + (n^2-1)x^n \rightarrow 0(x \rightarrow 1-0), 1/g'(x) = -\lambda^{-1}(1-x)^{1-\lambda} \rightarrow 0(x \rightarrow 1-0)$  or  $1/g'(x) = -\lambda^{-1}$  だから  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x)/g'(x) = 0$ 。

$1 < \lambda < 2$  のとき、 $f''(x) = -n^2(n-1)x^{n-2} + (n^2-1)nx^{n-1} \rightarrow n^2 - n(x \rightarrow 1-0), 1/g''(x) = \lambda^{-1}(1-\lambda)(1-x)^{-\lambda} \rightarrow 0(x \rightarrow 1-0)$  より、 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f''(x)/g''(x) = 0(x \rightarrow 1-0)$ 。

$\lambda = 2$  のとき、 $f''(x) \rightarrow n^2 - n(x \rightarrow 1-0), 1/g''(x) \rightarrow 1/2(x \rightarrow 1-0)$  だから  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f''(x)/g''(x) = \frac{n^2-n}{2}$ 。

$\lambda > 2$  のとき、 $g''(x) \rightarrow 0(x \rightarrow 1-0)$ 。まとめると、

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^\lambda} = \begin{cases} 0 & \lambda < 2, \\ (n^2 - n)/2 & \lambda = 2, \\ \infty & 2 < \lambda n \geq 2. \end{cases}$$

3  $f(x, y) = \log(1 + xy)$  の  $(x, y) = (0, 0)$  での Taylor 展開の 3 次までの項と、剰余項  $R_4$  を求めよ。  
 (Hint: 1 変数関数  $g(t) = \sum_{k=0}^3 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_4$  のとき  $R_4 = \frac{g^{(4)}(\theta t)}{4!} t^4$  となること、また 2 変数関数の Taylor の定理の証明方法を思い出せ)

略解 [7]:  $h(t) = f(tx, ty)$  とおき  $t$  の 1 変数関数として Taylor 展開して

$$h(t) = h(0) + th'(0) + \frac{t^2}{2!} h''(0) + \frac{t^3}{3!} h'''(0) + \frac{t^4}{4!} h^{(4)}(\theta t) \quad (0 < \theta < 1).$$

ここで

$$\begin{aligned} h'(t) &= x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty), \\ h''(t) &= x(x f_{xx}(tx, ty) + y f_{yx}(tx, ty)) + y(x f_{xy}(tx, ty) + y f_{yy}(tx, ty)) \\ &= x^2 f_{xx}(tx, ty) + 2xy f_{xy}(tx, ty) + y^2 f_{yy}(tx, ty), \quad \text{etc} \end{aligned}$$

即ち、

$$h'(t) = \frac{2txy}{1+t^2xy}, \quad h''(t) = \frac{2xy}{1+t^2xy} - \frac{(2txy)^2}{(1+t^2xy)^2} = \frac{2xy - 2t^2x^2y^2}{(1+t^2xy)^2}, \quad \text{etc.}$$

故に (これが 2 変数関数の Taylor 展開の定義なのだから)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + (x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0)) + \left( \frac{1}{2!} x^2 f_{xx}(0, 0) + xy f_{xy}(0, 0) + \frac{1}{2!} y^2 f_{yy}(0, 0) \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{3!} x^3 f_{xxx}(0, 0) + \frac{1}{2!} x^2 y f_{xxy}(0, 0) + \frac{1}{2!} x y^2 f_{xyy}(0, 0) + \frac{1}{3!} y^3 f_{yyy}(0, 0) \right) + R_4, \end{aligned}$$

かつ、 $x, y$  による数  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) があって

$$\begin{aligned} R_4 &= \sum_{j+k=4} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^4}{\partial x^j \partial y^k} f(\theta x, \theta y) x^j y^k = \frac{1}{4!} x^4 f_{xxxx}(\theta x, \theta y) + \frac{1}{3!} x^3 y f_{xxxxy}(\theta x, \theta y) + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} x^2 y^2 f_{xxyy}(\theta x, \theta y) \\ &\quad + \frac{1}{3!} x y^3 f_{xyyy}(\theta x, \theta y) + \frac{1}{4!} y^4 f_{yyyy}(\theta x, \theta y) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} f_x &= y(1 + xy)^{-1}, \quad f_y = x(1 + xy)^{-1}, \\ f_{xx} &= -y^2(1 + xy)^{-2}, \quad f_{yx} = (1 + xy)^{-2}, \quad f_{yy} = -x^2(1 + xy)^{-2}, \\ f_{xxx} &= 2y^3(1 + xy)^{-3}, \quad f_{xxy} = 2xy^2(1 + xy)^{-3}, \quad f_{xyy} = 2x^2y(1 + xy)^{-3}, \quad f_{yyy} = 2x^3(1 + xy)^{-3}, \\ f_{xxxx} &= (-1)3!y^4(1 + xy)^{-4}, \quad f_{xxxxy} = (-1)3!xy^3(1 + xy)^{-4}, \\ f_{xxyy} &= (-1)3!x^2y^2(1 + xy)^{-4}, \quad f_{xyyy} = (-1)3!x^3y(1 + xy)^{-4}, \quad f_{yyyy} = (-1)3!x^4(1 + xy)^{-4}, \end{aligned}$$

だから、

$$f(x, y) = xy + R_4 = xy - 4\theta^4 x^4 y^4 (1 + \theta^2 xy)^{-4} \quad (0 < \exists \theta < 1). \quad \square$$