微分積分学第一　V類T組 第10回講義内容（2005年6月23日）井上淳

来週6月30日（木）は中間試験実施！

場所：H121、　時間：10時40分から12時10分まで、　監督：染川睦郎（井上代理）

7　1変数関数の積分法

7.1　積分の定義

7.2　定積分の性質について

7.3　不定積分

7.4　微積分の基本定理

定理 7.1 (微分積分学の基本定理 1) $f(x)$ を区間 $I = [a,b]$ 上で $Riemann$ 可積分とし、I 上で微分可能な関数 F があって $F'(x) = f(x)$ とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

証明：区間 I の n 分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ を考えると、小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ での微分に関する平均値の定理より

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad (x_{k-1} \le \xi_k \le x_k)$$

が成立している。加えあわせて、

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

ここで、$n \to \infty$ とすると、最後の項は $\int_a^b f(x)dx$ に収束する。　□

系 7.1 (微分積分学の基本定理 2) $f \in C[a,b]$ とする。このとき、

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

証明：$f \in C[a,b]$ だから $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ なる積分が定義され、上の微分積分学の基本定理 1 を用いて

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [(f(t) - f(x)) + f(x)]dt = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt$$

となる。また、連続性より、任意の ϵ に対し $\delta > 0$ があって $|t - x| < \delta$ なる限り $|f(t) - f(x)| \le \epsilon$ となる。上の計算での h を $|h| < \delta$ ととると、

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\right| \le \epsilon$$

となる。これより、求めたい式が従う。　□

定理 7.2 (置換積分の公式) $f \in C[a,b]$ とする。$\phi(t)$ は $[\alpha,\beta]$ または $[\beta,\alpha]$ で C^1 級、かつそこで $a \leq \phi(t) \leq b$、$\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$ とすると、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

証明：F を $F' = f$ なるものとすると、合成関数の微分則から、

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

この両辺を t について $[\alpha,\beta]$ で積分して[1]

$$F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\phi(t))dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

ここで、前記の基本定理を用いて

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が従う。 □

定理 7.3 (部分積分の公式) $f \in C^1[a,b]$、$g \in C[a,b]$ とする。この時、

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[f(x)\int_a^x g(t)dt\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\left(\int_a^x g(t)dt\right)dx.$$

証明：$g(x)$ の不定積分を $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ とすると、

$$(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$$

だから、求める式が直ちに従う。 □

補題 7.1 $[a,b]$ 上非負の連続関数の積分値が零ならばその関数は $[a,b]$ 上恒等的に零である。

証明：$h \in C[a,b]$ が $h(x) \geq 0$ であり $\int_a^b h(x)dx = 0$ を満たすならば $[a,b]$ 上で $h(x) = 0$ なることを示せば良い。これの証明には以下のように背理法を用いると良い。即ち、或る点 x_0 があってそこでは $h(x_0) > 0$ と仮定し、矛盾を導く。h は連続だから、連続の定義の ϵ として $\epsilon = h(x_0)/2$ を取ると、ある $\delta > 0$ が存在して $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ならば $|h(x) - h(x_0)| < h(x_0)/2$ 即ち、$h(x_0)/2 < h(x) < 3h(x_0)/2$ となる。積分の定義から

$$0 < h(x_0)\delta \leq \inf_{x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} h(x)|x_0 + \delta - (x_0 - \delta)| < \int_a^b h(x)dx$$

これは仮定 $\int_a^b h(x)dx = 0$ に矛盾する。故に $h(x_0) > 0$ なる点 x_0 は無い。上の議論で $h(x_0) > 0$ なる点 x_0 が区間の端点の場合には $[a, a+\delta]$ か或は $[b-\delta, b]$ とする。 □

7.5 幾つかの計算例

● 計算例１：$n \geq 2$ のとき

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}), \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3} & (n \text{ が奇数}). \end{cases} \tag{1}$$

[1] 下の式の最初の等式は何故成立するのか？

（証）変数 x を変数 t に $x=\frac{\pi}{2}-t$ により変換する。$dx=-dt$、$\sin x=\cos t$ を用いて

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=-\int_{\pi/2}^0\cos^n t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$$

が導かれる。積分の値は $\sin x=-(\cos x)'$ を用いて部分積分する。

$$\begin{aligned}I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx&=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x(\cos x)'dx\\&=-[\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx\\&=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)\end{aligned}$$

これより

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

となる。一方

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x dx=1$$

だから、望みの結果が従う。　□

事の序でに Wallis の公式を述べておこう：

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

或いは

$$\sqrt{n\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!},\quad\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\pi}-\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)=0$$

を Wallis の公式という。ここで、記号

$$n\in\mathbb{N}\text{ に対し}\quad n!!=\begin{cases}n(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot1 & (n\text{ が奇数}),\\ n(n-2)\cdot\cdots\cdot4\cdot2 & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

を用いた。

問 1：上記の Wallis の公式を証明せよ。（ヒント：まず、上の計算式(1) を新しく導入した記号で書き直す。

$$I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & n\text{ が偶数},\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{ が奇数}.\end{cases}$$

更に、$(0,\pi/2)$ 上で $\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$ だから、$I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$ となることを用いる。）

問 2：Stirling の公式を証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}$$

（ヒント：$a_n=n!/(n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n})$ は単調減少数列であること、及び Wallis の公式を用いよ。）

計算例２：$f\in C[a,b]$ に対し

$$f_0(x)=f(x),\quad f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)dt,\ (n\in\mathbb{N},\ a\le x\le b)$$

とおくと、

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}dt$$

が成立する。

計算例３：$f \in C^n[a,b]$、$x, y \in [a,b]$ に対し

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n f(x+t(y-x))dt$$

を計算することにより Taylor の定理

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(y-x)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(x+t(y-x))dt$$

を導け。これを、**剰余項の積分表示**、或いは、**Schlömlich の剰余項**という。

注意：変数変換 $x = a + t(b-a) \in [a,b]$、$t = (x-a)/(b-a) \in [0,1]$ を用い、上の剰余項表示を

$$\int_a^b f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1-p}(b-x)^p dx$$

と書き直す。そして、$\varphi(x) = (b-x)^p$ として、積分の平均値の定理を用いると、ある $c \in [a,b]$ が存在して

$$\int_a^b f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1-p}(b-x)^p dx = \frac{f^{(k)}(c)(b-c)^{k-1-p}}{(k-1)!(p+1)}(b-a)^{p+1}$$

となる。$p = 0$ の時が Cauchy の剰余項、$p = k-1$ の時が Lagrange の剰余項であるが、この方法だと $c \in [a,b]$ となり、Taylor 展開の時の結論 $c \in (a,b)$ より幾分弱い主張になっている。しかし、積分表示も使い道が多い。

計算例 4：**Schwarz の不等式について**。

命題 7.1 (Schwarz) 任意の $f, g \in C[a,b]$ に対して

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)dx\Big| \le \Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big)^{1/2}$$

が成立する。等号成立は $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ を満たす λ, μ があって $[a,b]$ 上で $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ となるときに限る。

証明：任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、積分

$$0 \le I_t = \int_a^b (tf(x)+g(x))^2dx = t^2\Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big) + 2t\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big) + \Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big)$$

を考える。もし $\int_a^b f(x)^2dx \neq 0$ ならば、上式は t に関する 2 次式としてすべての t に対して非負であること、を意味する。故に t に関する判別式が非正、即ち

$$(*) \qquad \Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 - \Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big) \le 0$$

でなければならない。もしこの $(*)$ で等号が成立するならば、ある t_0 があって $I_{t_0} = 0$ でなければならない。即ち、$0 = I_{t_0} = \int_a^b (t_0f(x)+g(x))^2dx$ となり、上の補題から $t_0f(x) + g(x) = 0$ が任意の $x \in [a,b]$ で成立する。ところで、もし $\int_a^b f(x)^2dx = 0$ ならば、再度、上の補題を用いて $f(x) = 0$ となり、明らかに Schwarz の不等式は等式として成立している[2]。 □

[2] これで表現は少し異なるが、上の命題の等号成立条件を証明したことになる。どうして証明したことになっているのか、納得されただろうか？

7.6 線積分 （1 変数定積分の応用例）

積分という概念の応用例として、長さと面積、体積がある。１次元 Riemann 積分を用いて定義できる「長さ」について説明した。

定理 7.4 関数 $\phi(t),\ \psi(t)$ を区間 $[a,b]$ 上で C^1 級とするとき、曲線 $\gamma(t)=(\phi(t),\psi(t))$ の長さ L は次式で与えられる。

$$L=\int_a^b\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt.$$

証明：区間 $[a,b]$ の分割を $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ とし各小区間 $\Delta t_k=[t_{k-1},t_k]$ とする。点 $P_k=(x_k,y_k)$ を

$$x_k=\phi(t_k),\quad y_k=\psi(t_k)$$

によって定め、各線分 $P_{k-1}P_k$ の長さの和の極限

$$\lim_{|\Delta|\to 0}L(\Delta),\quad L(\Delta)=\sum_{k=1}^n\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$$

を作る。この極限があれば、曲線 $\gamma(t)=(\phi(t),\psi(t))$ の長さ L を与える、と考えられる。

さて、平均値の定理より

$$x_k-x_{k-1}=\phi'(\xi_k)(t_k-t_{k-1}),$$
$$y_k-y_{k-1}=\psi'(\eta_k)(t_k-t_{k-1}),$$

となる $\xi_k,\eta_k\in[t_k,t_{k-1}]$ が存在する。故に

$$L(\Delta)=\sum_{k=1}^n\sqrt{\phi'(\xi_k)^2+\psi'(\eta_k)^2}\cdot(t_k-t_{k-1})$$

となる。従って、三角不等式[3]$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\le|b-c|$ を用いて、

$$\begin{aligned}&\left|L(\Delta)-\sum_{k=1}^n\sqrt{\phi'(\xi_k)^2+\psi'(\xi_k)^2}\cdot(t_k-t_{k-1})\right|\\&\le\sum_{k=1}^n\left|\sqrt{\phi'(\xi_k)^2+\psi'(\eta_k)^2}-\sqrt{\phi'(\xi_k)^2+\psi'(\xi_k)^2}\right|(t_k-t_{k-1})\\&\le\sum_{k=1}^n|\ \psi'(\xi_k)-\psi'(\eta_k)|(t_k-t_{k-1})\end{aligned}$$

となる。一方、$|\Delta|\to 0$ とするとき、仮定より $\psi'(t)$ は $[a,b]$ で連続、だから一様連続なので

$$\sum_{k=1}^n\left|\psi'(\xi_k)-\psi'(\eta_k)\right|(t_k-t_{k-1})\to 0$$

が従う。これより

$$\lim_{|\Delta|\to 0}L(\Delta)=\int_a^b\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}dt.\qquad\square$$

注意：講義では詳しい説明をしなかったが、この講義録の説明で納得しただろうか？

系 7.2 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で C^1 級とする。曲線 $y=f(x)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

[3]Schwarz の不等式の一つ

系 7.3 (系 1.2.2.) 曲線が極方程式 $r = f(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ で表される時、その長さ L は

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta.$$

注意：上の系はどうしてか？もともと定理 7.4 は平面での距離を基に計算されている。とすると、極座標を用いて表示された点は $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ であるから、$t \to (\varphi(t), \psi(t))$ を $\theta \to (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$ として、定理 7.4 を適用しなければならないからである。

注意：面積、体積については、多次元での積分の概念を定義した後に説明される。

=========

メモ：受講者の出足も悪いし、最終的にも 60 名前後に減っているようだ。