微分積分学第一　V類T組 第6回講義内容（2005年6月2日）井上淳

======

体調の関係で、次回からしばらくは講義担当者が変わることを表明した。講義代読と言う形で、演習を見てくれている染川先生にお願いできるかと考えていたが、数学専攻長によるとそれはまずかろうとのことだ。今後の講義担当者は、1年次講義責任担当の石井先生が適宜決めて下さるとのことで、誰が担当者になるか楽しみにしていて欲しい。

======

1　実数とは何か

2　関数とは何か？

3　1変数関数の微分法

4　Taylorの定理とその応用（1変数の場合）

4.1　1変数Taylorの定理

4.1.1　数値を求める

4.1.2　Landauの記号とその応用

4.1.3　極大値、極小値を求める一つの方法

4.2　Taylor展開とMaclaurin展開

定義 4.1 (Taylor展開) 関数 $f \in C^\infty(I)$ が $x = c$ で *Taylor* 展開可能とは、*Taylor* の定理の剰余項について

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

が成立することである。このとき、

$$f(x) = \sum_{j}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(c)(x-c)^j$$

と書き、これを *Taylor* 級数と言い、この級数を求めることを、関数 f を $x = c$ で *Taylor* 展開するとも言う。また、$c = 0$ としたものを、*Maclaurin* 級数とも言う。

命題 4.1 以下に主な関数の *Maclaurin* 展開を与える。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1),$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\quad(-\infty<x<\infty),$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(-\infty<x<\infty),$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad(-\infty<x<\infty),$$

$$\log(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\quad(-1<x\le 1),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1,\forall\alpha\in\mathbb{R}).$$

注意：ここで $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ を示すとき、Taylor の定理における各種の剰余項の表示を用いるのだが、詳しくは後期になってから説明する予定である。

注意：この命題の一部

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad(-1<x<1),$$

を例にとって説明しようとして、講義ではうまくいかなかったので、ここに説明する。
$f(x)=(1-x)^{-1}$ より簡単に $f^{(m)}(x)=m!(1-x)^{-(m+1)}$ となる。即ち、$f^{(m)}(0)=m!$ で

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n-1}x^k+R_n\quad(-1<x<1)$$

となる。ここで剰余項として

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x)$$

という表示を用いると、$|1-\theta x|\ge 1-\theta|x|$ に注意し

$$|R_n|\le\left|\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}n!(1-\theta x)^{-(n+1)}\right|\le\frac{n|x|^n}{(1-\theta x)^2}\left|\frac{1-\theta}{(1-\theta|x|)}\right|^{n-1}$$

となる。簡単に $0<(1-\theta)/(1-\theta|x|)<1$ なることは分るから $|x|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}n|x|^n=0$ を用いて、$\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。(講義では、剰余項の $R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$ なる表示をとったので差し当たり詰まったのであった。より詳しくは、後期に回す。)

応用例：以下は $(e^x-e^{\sin x})\big|_{x=0}=0$, $(x-\sin x)\big|_{x=0}=0$ だから、不定形の極限の問題である、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1.$$

(i) Taylor の定理を用いた解法：Taylor の定理より $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\quad(x\to 0)$、即ち、$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+O(x^5)\quad(x\to 0)$ となる。また、

$$e^x-e^{\sin x}=e^x-e^{x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)}=e^x\left\{1-\left(1+\frac{1}{1!}\left(-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)+O(x^6)\right\}=e^x\left(\frac{1}{6}x^3+O(x^5)\right).$$

だから

$$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\frac{e^x\left(\frac{1}{6}x^3+O(x^5)\right)}{\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}\to 1\quad(x\to 0).$$

(ii) l'Hôpital の法則を用いた解法：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1.$$

$(e^x - e^{\sin x})\big|_{x=0} = 0$, $(x - \sin x)\big|_{x=0} = 0$ であるから次々に分母、分子を微分しそれらが $x \to 0$ で 0 になるかどうか調べる。

$$(e^x - e^{\sin x})' = e^x - \cos x{\cdot}e^{\sin x}, \quad (e^x - e^{\sin x})'' = e^x + \sin x{\cdot}e^{\sin x} - \cos^2 x{\cdot}e^{\sin x},$$
$$(e^x - e^{\sin x})''' = e^x + \cos x{\cdot}e^{\sin x} + 3\sin x{\cdot}\cos x{\cdot}e^{\sin x} - \cos^3 x{\cdot}e^{\sin x},$$
$$(x - \sin x)' = 1 - \cos x, \quad (x - \sin x)'' = \sin x, \quad (x - \sin x)''' = \cos x$$

だから、3 回微分したとき、分母、分子が $x \to 0$ のとき 0 と異なる極限を持つ。 □

演習問題 4.1 面積 C の定円に内接する正 n 辺形の面積を A_n、外接する正 n 辺形の面積を B_n とするとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{C - A_n}{B_n - C}$ を求めよ。

応用例：e^x を $x = 1$ で Taylor 展開すると、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

$2 < e < 3$ は既知だから、e の近似値として $2 + 1/2! + \cdots + 1/n!$ をとれば、その誤差は $3/(n+1)!$ より小さい。e の値を小数点以下第 5 位まで求めよう。$3/(n+1)! < 10^{-6}$ を満たす最小の n の値は 9 であるから、$2 + 1/2! + \cdots + 1/9!$ の値を求めるのだが、小数点以下第 8 位以下は切り捨てて計算すると、

$$\begin{aligned} 0.2182812 &= 0.1666666 + 0.0416666 + 0.0083333 + 0.0013888 + 0.0001984 + 0.0000248 + 0.0000027 \\ &< \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}. \end{aligned}$$

剰余項と切り捨て誤差

$$\text{剰余項} < \frac{3}{10!} < 8.3 \times 10^{-7}, \quad \text{切り捨て誤差} < 7 \times 10^{-7}$$

を加えて、

$$2.7182812 < e < 2.5 + 0.2182812 + 7 \times 10^{-7} + 8.3 \times 10^{-7} = 2.71828273.$$

故に、$e = 2.71828\cdots$ となる。 □

5 多変数関数の微分法

5.1 偏微分可能性

定義 5.1 (偏微分可能性) $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ が $x = \bar{x}$ で x_j-方向に偏微分可能とは、

(i) 関数 $f(x)$ が $x = \bar{x}$ の近くで定義されていること。

(ii) ある数 α_j があって、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j + h, \bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_n)}{h} = \alpha_j$$

となることである。

このとき、f は x_j-方向に偏微分可能であり、その $\bar{x}$ における偏微分係数（偏導関数）は

$$\alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} = f_{x_j}(\bar{x})$$

等と記される。∂ はラウンドディと読む。

● **方向微分**: x_j-方向への偏微分をより一般にする。

定義 5.2 (方向微分) f を $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数とする。$\bar{x} \in U$ をとり、任意の元（ベクトル）$\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対し、$t \in \mathbb{R}$ の関数 $g(t) = f(\bar{x} + t\gamma)$ を考える。もし $g(t)$ が $t = 0$ で微分可能ならば、f は $\bar{x}$ で γ-方向に偏微分可能といい

$$g'(0) = \frac{d}{dt} f(\bar{x} + t\gamma)\Big|_{t=0} = (D_\gamma f)(\bar{x})$$

等と記す。$D_\gamma f : x \to (D_\gamma f)(x)$ を f の x における γ-方向の導関数という。

注意：任意の j に対し $\gamma = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{j}, 0, \cdots, 0)$ とおくと、

$$D_{\mathbf{e}_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad (j = 1, \cdots, n).$$

5.2 全微分可能性

定義 5.3 (全微分可能性) $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ が $x = \bar{x}$ で全微分可能とは、

(i) 関数 $f(x)$ が $x = \bar{x}$ の近くで定義されていること。

(ii) $h = (h_1, \cdots, h_n)$, $\|h\| \to 0$ のとき、あるベクトル $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ があって

$$f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - h \cdot \alpha = o(\|h\|), \quad h \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{n} h_j \alpha_j. \tag{1}$$

このベクトルを f の $\bar{x}$ における微分係数といい $\alpha = \nabla f(\bar{x})$ と書く[1]。$f(x)$ が $\bar{x}$ の近くの x で定義されるとき、f の導関数 $x \to \nabla f(x)$ が定義される。

注意：(1) $f(x)$ が x で全微分可能ならば、$f(x)$ は x で連続である[2]。

(2) $f(x)$ の x における微分係数は一意的に定まる[3]。

(3) 式(1) をみて、少し混乱する人がいるようである。関数 f は実数値、α と h はベクトルだが $h \cdot \alpha$ は実数値だから式で「引く」ことができる。ここで、h は $\mathbb{R}^n$ の点だがベクトルと見なしている！

$n = 1$ のときは、微分可能性しかなかったのに、$n \geq 2$ となると偏微分可能性と全微分可能性と出てくる。何故か？について説明した。

定理 5.1 f を $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数で、$x \in U$ で全微分可能とするとき、以下が成立する：*(1)* 任意の元 $\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対し、f は x で γ-方向に微分可能であり

$$(D_\gamma f)(x) = \gamma \cdot \nabla f(x). \tag{2}$$

(2) 特に、f は各座標について x で偏微分可能で

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

が成り立つ。

[1] 以下に述べる注意参照。ここで Landau の記号スモールオー $o(\|h\|)$ の説明

[2] この証明の中で Cauchy の不等式の証明を再度行なった

[3] これの証明は、「数列の極限が存在すればそれは一意的である」ことと同様にすれば良い

例 1（**すべての方向に微分可能でも全微分可能とは限らない。更にすべての方向に微分可能でも連続でさえもない**）

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq 0,\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

を考える。任意の $\gamma=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し 0 で

$$(D_\gamma f)(0)=\begin{cases}\frac{x^2}{y} & y\neq 0,\\ 0 & y=0\end{cases}$$

となるから、すべての方向に微分可能である。一方放物線 $y=x^2$ に沿って $0=(0,0)$ に近づくと

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0, x\neq 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0)$$

より f は $(0,0)$ で連続ではないので、全微分可能ではない。

定義 5.4 関数 f が x-方向、y-方向に偏微分可能であり、更に f_x、f_y が共に連続関数なるとき、f は C^1-級関数という。

定理 5.2 f を開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数で、$x\in U$ で C^1-級ならば、f は全微分可能である。

5.3 合成関数の偏微分

多変数の場合の合成関数の微分（連鎖公式）：

● $f(x,y)$ は全微分可能で、$x=x(t)$、$y=y(t)$ が t について微分可能であるとき、合成関数 $g(t)=f(x(t),y(t))$ は t について微分可能で次式が成立する。

$$\frac{dg(t)}{dt}=f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)+f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t),\qquad \dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt},\quad \dot{y}(t)=\frac{dy(t)}{dt}.$$

別法：

$$\begin{aligned}f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)) &= f(x(t)+x(t+\Delta t)-x(t),y(t)+y(t+\Delta t)-y(t))\\ &= f(x(t),y(t))+f_x(x(t),y(t))[x(t+\Delta t)-x(t)]\\ &\quad +f_y(x(t),y(t))[y(t+\Delta t)-y(t)]+o(([x(t+\Delta t)-x(t)]^2+[y(t+\Delta t)-y(t)]^2)^{1/2})\\ &= f(x(t),y(t))+f_x(x(t),y(t))[\dot{x}(t)\Delta t+o(\Delta t)]+f_y(x(t),y(t))[\dot{y}(t)\Delta t+o(\Delta t)]+o(\cdots)\\ &= f(x(t),y(t))+f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)\Delta t+f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t)\Delta t+o(\Delta t).\qquad\square\end{aligned}$$

5.4 高階偏導関数

高階偏微分、C^k-級関数：関数 f が x-方向に偏微分可能であり、更に f_x が x-, y-方向に偏微分可能のとき

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\partial_x\partial_x f=\partial_x^2 f,\quad f_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\partial_y\partial_x f$$

と表示する。同様に、f_y に対し

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\partial_x\partial_y f,\quad f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=\partial_y\partial_y f=\partial_y^2 f$$

と表示する。

ところで、

$$\partial_x(\partial_y f) = f_{xy} \quad \text{と書くか} \quad f_{yx} \quad \text{と書くか?}$$

ここでは、$f_{xy} = (f_y)_x$ をとることにするが、$f_{xy} = (f_x)_y$ とする人もいる。以下に述べる理由により、この講義ではどちらを用いても良い場合を主として考えるので、それほど気にしなくて良い。

● 一般には高階偏微分はその偏微分の順序による！これを示すために、次のような関数について

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ を主張する。$y \neq 0$ に対し

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2} = -y,$$

だから

$$f_{yx}(0,0) = \frac{d}{dy} f_x(0,y)\bigg|_{y=0} = -1.$$

同様に $x \neq 0$ に対し

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x(x^2-k^2)}{x^2+k^2} = x,$$

だから

$$f_{xy}(0,0) = \frac{d}{dx} f_y(x,0)\bigg|_{x=0} = 1.$$

ところで、変数変換（極座標変換）

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

を上の式の右辺に用いると、

$$\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}\bigg|_{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1+8\cos^2\theta\sin^2\theta) = \begin{cases} -1, & \theta = \pi/2, \\ \cdots, & 0 < \theta < \pi/2, \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$$

これは、

$$\lim_{(r\sin\pi/2, r\cos\pi/2)\to 0} f_{yx}(x,y) \neq \lim_{(r\sin 0, r\cos 0)\to 0} f_{yx}(x,y)$$

を意味する。このようなことは、１変数では起こり得ない！しかし、このこのことと $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ とはどう関係しているのか？

$$f_x(x,y)\bigg|_{x=r\sin 0, y=r\cos 0} = f_x(0,r) = -r, \quad \frac{df_x(0,r)}{dr} = -1, \quad f_{yx}(0,0) = -1,$$

$$f_y(x,y)\bigg|_{x=r\sin\pi/2, y=r\cos\pi/2} = f_y(r,0) = r, \quad \frac{df_y(r,0)}{dr} = 1, \quad f_{xy}(0,0) = 1.$$

ところで

定理 5.3 (Schwarz) 点 (a,b) の近くで f_x, f_y, f_{xy} が存在して、f_{yx} が (a,b) で連続ならば、$f_{xy}(a,b)$ も存在して、(a,b) で $f_{xy} = f_{yx}$。

以下では、$f_{xy} = f_{yx}$ となるような関数達を考える方が都合が良い。そこで、次のような定義を導入する：

定義 5.5 $f(x,y)$ が C^2-級であるとは、２回偏微分可能であり、全ての２階偏導関数

$$f_{xx}(x,y), \quad f_{xy}(x,y), \quad f_{yx}(x,y), \quad f_{yy}(x,y)$$

が連続になることである。

より一般に C^k-級関数とは

$$\frac{\partial^{\ell+m} f}{\partial x^\ell \partial y^m} \qquad (\ell + m \leq k)$$

が存在し、連続なるものとして定義する。

講義の最後に、２変数の Taylor の定理とその証明について述べた。詳しくは、次回の講義予定に書いてあるので、そこを参照して欲しい。

====================================

メモ：出席者最初は 70 名で最後には 80 余名になっているようだが、講義室が広いので人数の確認は近視だと困難である。