微分積分学第一　Ｖ類Ｔ組 第８回講義内容（2005 年 6 月 16 日）井上淳　revised

今回からは、積分論に入るつもりであったが予定を変更する。前回講義後の質問から推測すると、幾分の説明不足を感じたので、その分を補填する。

尚、予定版の幾つかの間違いやら、より詳しい説明が必要なもの、また演習で説明されたが分らなかった事柄の質問が講義後にあった。それらを、この稿では述べておくので、もう一度見直しておいて欲しい。

1　実数とは何か

2　関数とは何か？

3　１変数関数の微分法

4　多変数関数の微分法

5　Taylor の定理とその応用（１変数の場合）

6　Taylor の定理とその応用（２変数の場合）

6.1　合成関数の微分、偏微分について

6.2　Taylor の定理の証明

定理 6.1 (Taylor の定理) 区間 $(a-\epsilon_1, b+\epsilon_2)$（$\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$）で C^n 級の関数 $f(x)$ に対し

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), & (\exists\theta \in (0,1)), \\ \dfrac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta'(x-a)), & (\exists\theta' \in (0,1)), \end{cases}$$

等と表現される。

注意：前々回か、剰余項の 2 つの異なる表示について述べたところ、「覚えなければいけないのですか」と言う質問があった。その危惧をやわらげる為には、証明を与えるのが一番なので、ここに記しておくが、一瞥して面倒と思ったら、来学期に説明されるまでほっておいて結構である。この異なる表現が必要なことは、前々回に述べた Taylor 展開の例の証明で私が講義中に詰まったことを思い出せば、了解できるであろうし、覚えることは大した問題ではないとも理解して欲しい。

注意：1 年次数学で出てくるの多くの公式は「自然に覚えてしまう」程に演習問題をやると良いのだが、なかなかそうはならないものである。しかし、「覚えなければいけない」という思い込みから、教科目が嫌いになっていくと言う、「何やら本末転倒では？」という気質の人もいるようだ。ともかく、老教師に気楽にものを聞きに来て欲しいし、折角数学教室で用意してある「数学相談室」を尋ねて欲しい。

証明： 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A(b-x)^n$$

とし、 Rolle の定理を適用できるように A を定める[1]：

と書いたが、上の $g(x)$ では $g(a) = f(a)$ とはならない。間違いで

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A(x-a)^n$$

と修正する！これは X 君が、1,2 時限の講義の眠気さましにこの講義録を見てくれて発見された。感謝！

$$g(a) = f(a) = g(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + A(b-a)^n$$

即ち、

$$A = \frac{1}{(b-a)^n} \left(f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$

と定める。これより Rolle の定理を用いて、$a < c < b$ があって $g'(c) = 0$ となる。一方、

$$g(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + A(b-x)^n$$

だから、微分して

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + \left(-f'(x) + \frac{b-x}{1!} f''(x) \right) + \left(-\frac{b-x}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) \right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right) - nA(b-x)^{n-1} \\ &= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - nA(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。故に、

$$0 = g'(c) = \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) - nA(b-c)^{n-1}, \quad f^{(n)}(c) = n!A.$$

即ち、

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n = f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \qquad \square$$

注意。上の定理で「区間 $(a-\epsilon_1, b+\epsilon_2)$ $(\epsilon_1, \epsilon_2 > 0)$」という表現をしたのは、区間の端点 a, b での微分可能性についていちいち右微分、左微分と断るのが面倒だったためである。

注意：Taylor の定理において

$$R_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

[1] 2002 年度には「Taylor さんはどう考えてこの定理を見つけたのですか？凄いですね」という質問があった

とおくと、上の定理では

$$R_n = \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi + \theta^{\{n\}}(x-\xi)) \quad (0 < \theta^{\{n\}} < 1)$$

なるものが現われたがこれを Lagrange の剰余という。ここで、数 $\theta^{\{n\}}$ は f にも x,ξ にも依っているが、それらへの依存を明示しなかった。この記号は単に、$\theta^{\{n\}}$ と $\theta^{\{1\}}$ を区別するためのものである。Cauchy の剰余という次の表現もある：

$$R_n = \frac{(1-\theta^{\{1\}})^{n-1}(x-\xi)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi + \theta^{\{1\}}(x-\xi)) \quad (0 < \theta^{\{1\}} < 1).$$

Lagrange の剰余は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{n\}}(b-x)^n$$

とし、この関数 $g(x)$ が $g(b) = g(a)$ を満たすように $A^{\{n\}}$ を定め、これに Rolle の定理を適用して求まる。一方、Cauchy の剰余は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{1\}}(b-x)$$

とし同様の操作で求まる。

これから直ちに、読者は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{\ell\}}(b-x)^\ell \quad (\ell = 1, 2, \cdots, n)$$

とし同様の操作で何が得られるか興味を持って、さっきまで重かった鉛筆も急に軽くなって紙の上を走り出してはいないだろうか？

6.3 極大値、極小値を求める一つの方法

この小節は、前回の講義内容に記載されているが、講義中には十分に説明できなかったので、今回もう一度説明する。また、前回の講義の後での質問の幾つかは、質問してくれた人はともかく質問しなかった人にも、もう一度理解をチェックして欲しいので、それも説明する。

命題 6.1 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^2(I \times J)$ が、領域の点 (a,b) で

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0, \quad \text{かつ} \quad J_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{が負定値行列}$$

となるとする。すると、関数 f は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる。

定義 6.1 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^1(I \times J)$ に対し、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を関数 $f(x,y)$ の停留点 *(stationary point)* という。

定義 6.2 $n \times n$-行列 $A = (a_{ij})$ が負定値行列であるとは、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\cdots,0)\}$ に対して

$$\xi \cdot A\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j \Big) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j < 0$$

となることである。

特に $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が負定値行列となる必要十分条件は

$$a < 0,\ c^2 - ab < 0$$

である。実際、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\xi_1(a\xi_1 + c\xi_2) + \xi_2(c\xi_1 + b\xi_2) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2 < 0$$

となるための条件は、上に述べたものである。

命題?? の証明: さて、$f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$ だから

$$f(x,y) = f(a,b) + R_2,$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2}\big[f_{xx}(\cdots)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\cdots)(y-b)^2\big] \\ &= \frac{1}{2}(x-a, y-b)\cdot J_f(\cdots)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \quad J_f(\cdots) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\cdots) & f_{yx}(\cdots) \\ f_{xy}(\cdots) & f_{yy}(\cdots) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但し、記法上 $(\cdots) = (a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))$ とした。$f \in C^2(I \times J)$ であるから、$J_f(a,b)$ は負定値行列という仮定より、$(\cdots)$ が (a,b) の十分近くにあるとき $J_f(\cdots)$ も負定値行列。あとは、１変数の場合と同様の議論で、(x,y) が (a,b) の十分近くにあるとき

$$f(x,y) \le f(a,b) \quad \text{即ち、} f(x,y) \text{ は } (a,b) \text{ で極大.} \quad \square$$

注意：$J_f(a,b)$ が負定値でも正定値でもない場合、点 (a,b) が極値を与える点かどうか、一般的な判定はできない。

定義 6.3 一般に点 (a,b) は、二つのベクトル $(x_1, y_1) \neq (0,0)$, $(x_2, y_2) \neq (0,0)$ が存在して t に関する関数 $g(t) = f(a + tx_1, b + ty_1)$ が $t = 0$ で極小、s に関する関数 $h(s) = f(a + sx_2, b + sy_2)$ が $s = 0$ で極大となるとき、関数 $f(x,y)$ の峠点という。

注意：「峠点」という言葉から、司馬遼太郎の「峠」という小説を思い出した。この物語の主人公が「河井継之助」で、この彼が「越後長岡藩」の運営を任され、藩の去就（近代的中立国として官軍にも幕軍にもつかない「藩」として存続させる）について官軍との談判になった。しかし、官軍の馬鹿「将」に考えを全く理解されず「官軍の邪魔だ、消せ」ということになり、大きな犠牲を出した北越戦争となった。そして越後長岡藩大敗から、小泉が前に引用した「米百俵」を生み出す場面が到来した。Google で「米百俵」を探すと長岡市広報による故事来歴を見ることができる。

例えば、関数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ に対する停留点 $(0,0)$ は、$f(x,0) = x^2$ が $x = 0$ で極小値、$f(0,y) = -y^2$ が $y = 0$ で極大値を持つので、峠点である。

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

質問１：演習で、$e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2)$ の停留点は (a,b) に依らず $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(0,0)$ のうち $(0,0)$ は峠点を与えることが示された。そこでの説明が良く分らなかった？

答らしきもの：（どういう説明があったのかの詳細は分らなかったが）上に述べた峠点の定義に従う**「峠の道」がどうして導き出されたか**が不思議だったということのようだ。これについては、次回もう一度説明した方が良さそうである。

より一般に、関数 $f(x,y)$ に対する停留点 (a,b), $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$, で

$$\det\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b)-\lambda & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)-\lambda \end{pmatrix} = \det(H_f(a,b)-\lambda\mathbb{I}_2)$$
$$= \lambda^2 - (f_{xx}(a,b)+f_{yy}(a,b))\lambda + f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)f_{yx}(a,b) = 0$$

を満たす実根[2] λ_1, λ_2 の性質を調べる。これらは停留点 (a,b) での Hessian（ヘッセ行列、ヘッシアン）$H_f(a,b)$ に対応する固有値[3]になり、以下のように分類される。

(i) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ならば停留点 (a,b) は極小点、

(ii) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ならば停留点 (a,b) は極大点、

(iii) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ ならば停留点 (a,b) は峠点、

(iv) $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ならばその停留点 (a,b) の近辺の関数の挙動はこの情報だけでは不明。

質問 2：何故 $D = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ が出てくるか分らない？

答らしきもの：停留点 (a,b) での Hessian（ヘッセ行列、ヘッシアン）$H_f(a,b)$ の行列式のマイナスが $D(a,b)$ である。この説明で、質問者は分かったという顔をしていたが、私は「何故分かったのか、分らない」

質問 3：『関数 $f(x,y)$ に対する停留点 (a,b), $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$, で Hessian（ヘッセ行列、ヘッシアン）$H_f(a,b)$ が負定値ならば (a,b) は極大点となる』というが、分らない。$x-a$, $y-b$ を任意にとっても

$$f_{xx}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)^2 + 2f_{xy}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)(y-b)$$
$$+ f_{yy}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(y-b)^2 < 0$$

となる一つの十分条件が

$$f_{xx}(a,b) < 0, \quad D(a,b) = f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$$

となるのは、何故だ？$X = x-a, Y = y-b$ と書き換えると

$$f_{xx}(a+\theta X, b+\theta Y)X^2 + 2f_{xy}(a+\theta X, b+\theta Y)XY + f_{yy}(a+\theta X, b+\theta Y)Y^2 < 0$$

となるが、$(a+\theta X, b+\theta Y)$ はぐらぐら「動く」から考えにくい。

答らしきもの：1 変数のときは $f''(a) < 0$ で $f''(x)$ が連続ならば、$y-a$ が十分小さいときは $f''(y) < 0$ となる。だから、$y-a = \theta(x-a)$ が十分小さいときは $f''(a+\theta(x-a)) < 0$ であり、

$$f'(a) = 0 \quad f''(a) < 0 \Longrightarrow f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2 < 0 \quad \text{但し、} x-a \text{ が十分小さいとき.}$$

2 変数の場合、f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} が連続で

$$f_{xx}(a,b) < 0, \quad D(a,b) = f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0 \tag{1}$$

となるならば、$(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$ を $(\cdots)$ と略記して、

$$f_{xx}(\cdots) < 0, \quad D(\cdots) = f_{xy}^2(\cdots) - f_{xx}(\cdots)f_{yy}(\cdots) < 0 \tag{2}$$

が言えれば良いことになる。『(**??**) が言えれば良い』が示されれば、質問者はすっきりするだろうか？ところで(**??**) から(**??**) はどう示したらよいのか？この証明は、$\epsilon - \delta$ 論法があると分かりやすいので、後学期に持ち越すが、楽しみにして欲しい。

[2]実数値解のこと。この式は虚根（虚数値解というのか？）を持たないことはすぐ分かる

[3]行列とその固有値については線形代数の講義で説明される

6.4 より一般的な合成関数の微分について

● 変数変換

$$(u,v)\to(x,y):\quad x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v)$$

を与え、合成関数 $g(u,v)=f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ を考える。$f(x,y)$ が全微分可能で、$x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ がそれぞれ u,v の偏微分可能ならば、

$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

となることは、明らかであろう。

● 特に応用として極座標変換を考察する。

$$(r,\theta)\to(x,y):\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

とするとき、$\tilde{u}(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと、

$$\tilde{u}_r(r,\theta)=\frac{\partial\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,$$
$$\tilde{u}_\theta(r,\theta)=\frac{\partial\tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-u_x r\sin\theta+u_y r\cos\theta$$

となる。但し、$u_x=u_x(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $u_y=u_y(r\cos\theta,r\sin\theta)$ の意味である。

更に

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{rr}(r,\theta)=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2}&=(u_{xx}\cos\theta+u_{yx}\sin\theta)\cos\theta+(u_{xy}\cos\theta+u_{yy}\sin\theta)\sin\theta\\
&=u_{xx}\cos^2\theta+(u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\theta+u_{yy}\sin^2\theta,\\
\tilde{u}_{\theta r}(r,\theta)=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta\partial r}&=(-u_{xx}r\sin\theta+u_{yx}r\cos\theta)\cos\theta-u_x\sin\theta+(-u_{xy}r\sin\theta+u_{yy}r\cos\theta)\sin\theta+u_y\cos\theta\\
&=(-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta+u_{yx}r\cos^2\theta-u_{xy}r\sin^2\theta-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta,\\
\tilde{u}_{r\theta}(r,\theta)=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r\partial\theta}&=-(u_{xx}\cos\theta+u_{yx}\sin\theta)r\sin\theta-u_x\sin\theta+(u_{xy}\cos\theta+u_{yy}\sin\theta)r\cos\theta+u_y\cos\theta\\
&=(-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta-u_{yx}r\sin^2\theta+u_{xy}r\cos^2\theta-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta,\\
\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta)=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta^2}&=-(-u_{xx}r\sin\theta+u_{yx}r\cos\theta)r\sin\theta+(-u_{xy}r\sin\theta+u_{yy}r\cos\theta)r\cos\theta-u_x r\cos\theta-u_y r\sin\theta\\
&=u_{xx}r^2\sin^2\theta+u_{yy}r^2\cos^2\theta-(u_{yx}+u_{xy})r^2\cos\theta\sin\theta-u_x r\cos\theta-u_y r\sin\theta,
\end{aligned}$$

となることが示される。前と同様、$u_{xx}=u_{xx}(r\cos\theta,r\sin\theta)$, etc である。これらから、

$$\tilde{u}_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}\tilde{u}_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta)=(u_{xx}+u_{yy})(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

$$\tilde{u}_r^2(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_\theta^2(r,\theta)=(u_x^2+u_y^2)(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

となる。

ここで、

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

をラプラシアン (Laplacian)、ラプラス作用素という。これの n-次元版は

$$\Delta u(x)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

となる。

次のような質問があった。

$$\tilde{u}_r(r,\theta) = u_x\cos\,\theta + u_y\sin\theta = \Big(\cos\,\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u,$$
$$\tilde{u}_\theta(r,\theta) = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\,\theta = \Big(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\,\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{rr}(r,\theta) &= \frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2} = \Big(\cos\,\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 u = \Big(\cos\,\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\cos\,\theta\,u_x + \sin\theta\,u_y)\\ &= \cos\,\theta\,\frac{\partial}{\partial x}(\cos\,\theta\,u_x + \sin\theta\,u_y) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}(\cos\,\theta\,u_x + \sin\theta\,u_y)\\ &= u_{xx}\cos^2\theta + (u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\,\theta + u_{yy}\sin^2\theta, \quad \underline{\cos\,\theta, \sin\theta\text{ は }x,\,y\text{ と無関係と考えて計算して}}\text{！}\end{aligned}$$

と計算して良いのか？正しい！この時の計算過程では右辺の u は x, y の関数として計算し、最後に $x = r\cos\,\theta$, $y = r\sin\theta$ と代入している。このような計算方法は、例えば、吹田–新保「理工系の微分積分学」pp.166-167 でも用いられている。しかし、この計算方法は慣れないうちは「変数をどうとっているのか混乱し」間違いやすいので、講義中のような計算をすることをすすめている。

——————————————————

7　１変数関数の積分法

7.1　積分の定義

定義 7.1（構成的 [*constructive*] 積分の例）$[a,b]$ 上の実数値関数 f が *Riemann* 可積分で積分値 A を持つとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$[a,b]$ の分割 $\mathcal{D}$ と目印点 Ξ を

$$\mathcal{D}: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{と} \quad \Xi = \{\xi_1,\cdots,\xi_n\} \quad \text{を} \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad \max_{i=1,\cdots,n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$$

なるようにとると

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\Big| < \epsilon$$

となることをいう。$A = \int_a^b f\,dx,$ 或いは $A = \int_a^b f(x)dx$ 等と記す。

$[a,b]$ の分割と目印点を

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, x_k = a + kh_n,\ h_n = \frac{b-a}{n}, \quad \xi_k = x_{k-1}\text{ 或いは }x_k$$

と定めると、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big[h_n\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh_n)\Big]\Big(or = \lim_{n\to\infty}\Big[h_n\sum_{k=1}^{n} f(a+kh_n)\Big]\Big).$$

これが高校時代数学での積分の定義だったが、実はもし被積分関数 $f(x)$ が連続ならば Riemann 積分の定義からこう計算して良いことが示される。

例：$\displaystyle\int_a^b x^2 dx$ の計算。以下の計算は 16 日にはやらなかったが、20 日に解説したので、そのままここに記しておく。

$$
\begin{aligned}
h_n \sum_{k=1}^{n} (a + k h_n)^2 &= h_n \sum_{k=1}^{n} (a^2 + 2akh_n + k^2 h_n^2) = h_n \left(a^2 n + 2ah_n \frac{n(n+1)}{2} + h_n^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n+1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \quad (h_n = \tfrac{b-a}{n} \text{ を代入して})
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \left[a^2(b-a) + a(b-a)^2 \frac{n+1}{n} + (b-a)^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right] \\
&= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).
\end{aligned}
$$

ところで

$$
S(n, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}
$$

はどう計算したのか？

$$
\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.
$$

この公式の $n = 10$ の場合については、Gauss の有名な逸話がある。与えられた $S(n, \alpha)$ の公式を数学的帰納法で証明することは君たちには簡単なことだろう。問題は、$S(n, \alpha)$ の公式をどう見つけるかである。

一つの考え方は、

$$
(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1, \quad (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1, \quad \text{etc},
$$

の両辺をそれぞれ $k = 1$ から n まで加えあわせる (telescoping sum) ものである。

==

メモ：受講者数が 70–80 名か？