微分積分学第一　Ｖ類Ｔ組 期末試験（2005 年 7 月 28 日）井上淳

● 問題は 5 題、答案用紙は 5 枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、裏を使うことを明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）や感想を是非記して下さい（時間がない場合はメールで１週間以内に)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはありません！

==================

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\sqrt[3]{28}$ を手計算で小数点以下 3 桁まで求め、誤差を評価せよ。（ヒント：ポケコン Casio fx-4500P で計算すると $\sqrt[3]{28} = 3.036588972\cdots$ である。$1/3^3 \doteqdot 0.037037$, $1/3^7 \doteqdot 0.000457$ を用いよ）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ の極値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 定積分の定義を用いて以下を計算せよ。

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}. \quad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)^{\beta+1}}{(1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta)^{\alpha+1}}\ (\alpha,\beta > 0).$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の不定積分を求めよ。

$$(i) I_{m,n} = \int x^m (\log x)^n dx\ (m > -1), \qquad (ii) I_{a,b} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a < b).$$

ヒント：(i) 漸化式を考えよ。(ii) 変数変換 $t = \sqrt{(b-x)/(x-a)}$ を用いよ

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の微分方程式を解け（即ち、関数 $y = y(x)$ で以下の微分方程式を満たすものを求めよ)：

$$(i)\ (1-y) + (1-x)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (ii)\ \frac{dy}{dx} = \cos(x-y) - \cos(x+y).$$

%%%

ヒント：基本的な関数の原始関数 (右辺の関数を微分したものが左辺の被積分関数となる) のリスト。

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x|, \quad \int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0,\, a \neq 1),$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)| \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a \neq 0),$$

$$\int \log|x|dx = x\log|x| - x, \quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log|x + \sqrt{x^2+A}| \quad (A \neq 0),$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x + \sqrt{x^2+A}|) \quad (A \neq 0).$$