微分積分学第一　V 類 T 組 期末試験解答例＋講評（2005.7.28 +revised 8.30）井上淳

講評：演習 30 点の平均点は 25 点。このためか多くの諸君が講義・演習共に合格であり、不合格者は 15 %程度であったので、現時点で追試予定は無い。ここに特に成績が良かった諸君の姓を記して努力を讃える：

ドンター、吉田、五十嵐、濱田、藤原、瀧野、隅田、竹田、向山

諸君の今回の講義・演習・試験に対する感想を後学期の講義の参考にするつもりである。

尚、試験中にも質問が出た、『多変数関数の臨界点でそこでの Hessian が 0 であるとき、そこで極値となるかどうかの判定』については、以下の解答例に詳しく述べておいた。

後学期の講義の変更に注意!

==

$\boxed{1}$ [10 点] $\sqrt[3]{28}$ を手計算で小数点以下 3 桁まで求め、誤差を評価せよ。（ヒント：ポケコン Casio fx-4500P で計算すると $\sqrt[3]{28} = 3.036588972\cdots$ である。$1/3^3 \doteqdot 0.037037$, $1/3^7 \doteqdot 0.000457$ を用いよ）

解答例：「手で小数点以下 3 桁まで求める」とは、$f(x) = \sqrt[3]{x}$ として $f(28) = \sqrt[3]{28}$ の値を $a = 3^3$ で Taylor 展開し、剰余項の小数点以下第 5 桁の値が切り上がらないように与えられた近似値を用いて求め、誤差を評価せよということである。

$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = 3\sqrt[3]{1+3^{-3}}$ だから、$g(h) = 3\sqrt[3]{1+h}$ を $h = 0$ で Taylor 展開し、$h = 3^{-3}$ のときの剰余項の小数点以下第 5 桁の値が切り上がらないようにする。$0 < \theta < 1$ が存在して

$$g(h) = g(0) + g'(0)h + \frac{g''(0)h^2}{2!} + \cdots + R_n, \quad R_n = \frac{g^{(n)}(\theta h)h^n}{n!}$$

となるから、R_n を最大にし

$$|R_n| < 5 \times 10^{-4} = 0.0005$$

となる n を推測する。

$$g^{(n)}(\theta h) = 3\cdot\frac{1(1-3\cdot1)\cdots(1-3(n-1))}{3^{n-1}}(1+\theta h)^{(1-3n)/3}$$

と $1 + \theta h \geq 1$、及びヒントの数値を用いて

$$\left|\frac{g^{(2)}(\theta h)h^2}{2!}\right| \leq \frac{1}{3^6} = 3 \times \frac{1}{3^7} \doteqdot 3 \times 0.000457 = 1.371 \times 10^{-3},$$

$$\left|\frac{g^{(3)}(\theta h)h^3}{3!}\right| \leq \frac{5}{3^{11}} = 1/3^3 \times 1/3^7 \times \frac{5}{3} \doteqdot 0.0370 \times 0.000457 \times 1.667 \doteqdot 2.82 \times 10^{-5}$$

となるから $n = 3$ であることが分る。ここで小数点以下第 6 位以下を切り上げ及び切り下げて計算すると

$$\begin{array}{ccccccc} & & g(0) & = & 3 & & , \\ 0.03703 & < & g'(0)h & = & \frac{1}{3^3} & < & 0.03704, \\ -0.00046 & < & \frac{g''(0)h^2}{2!} & = & -\frac{1}{3^7} & < & -0.00045 \\ 0.00002 & < & \frac{g^{(3)}(0)h^3}{3!} & = & \frac{5}{3^{12}} & < & 0.00003 \end{array}$$

であり、

$$3+0.03703-0.00046+0.00002 = 3.03659 < 3+g'(0)h+\frac{g''(0)h^2}{2!} < 3.03662 = 3+0.03704-0.00045+0.00003$$

となる。切り上げ及び切り下げのため生じた誤差は全体で 3×10^{-5} を越えていないから、その影響を考慮すると、

$$3.03659-00003=3.03656<3\sqrt[3]{1+3^{-3}}\leq 3.03665=3.03662+00003$$

となり、$\sqrt[3]{28}$ は小数点以下 3 桁までは 3.036 であり、誤差は ± 0.0007 である。　□

配点について：いきなり $g(0)+g'(0)h+\frac{g''(0)h^2}{2!}$ にヒントで与えた数値を代入して計算し、その値を $3+0.037037-0.000457=3.036580$ とし、上に与えた $3.036588972\cdots$ との比較で小数点以下 3 桁までに誤差無しとした答案は、この問題の解答になっていないことになる。しかし、Taylor 展開を少しは思い出したことを了とし 2 点程度を与えた。それに Taylor 展開の剰余項の表現があれば 1 点を加えた。何項まで展開したらよいかの考察、与えられたデータ $1/3^3\fallingdotseq 0.037037$ 等自身に誤差があること、切り上げ切り下げ誤差への配慮があると高得点になった。

注意：解答時にはポケコンの携行は認めていないが、携帯電話がその機能を持っていれば使用不可と言っても、つい使ってしまうであろうし、使わせないように監視するというのも極めて非生産的である。そこで、むしろ数値は与えて計算過程に重点をおくことにした。

注意：最初の解答例と少し異なっている。追試ヲスル必要ガ生ジレバ、この Taylor 展開を用いて数値を求めるものを再度出題するつもりである。よく理解しておいて欲しい。

2 [10 点] 関数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2+xy-y^2$ の極値を求めよ。

解答例：$f(x,y)$ の停留点 (x,y) は $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たすので

$$4x^3-2x+y=0,\quad 4y^3-2y+x=0$$

となる。A,B を実数として $A=0,\ B=0 \Longleftrightarrow A+B=0,\ A-B=0$ を用いて

$$4(x^3+y^3)-(x+y)=0,\quad 4(x^3-y^3)-3(x-y)=0$$

となる。これから

$$(x+y)[4(x^2-xy+y^2)-1]=0,\quad (x-y)[4(x^2+xy+y^2)-3]=0$$

であり、A,B,C,D を実数として

$$AB=0,\ CD=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A=0 \text{ かつ } (C=0 \text{ 或いは } D=0), \\ \text{或いは} \\ B=0 \text{ かつ } (C=0 \text{ 或いは } D=0), \end{cases}$$

より、

(i) $x-y=0$ かつ $[4(x^2-xy+y^2)-1=0$ 或いは $x+y=0]$,
(ii) $4(x^2+xy+y^2)-3=0$ かつ $[x+y=0$ 或いは $4(x^2-xy+y^2)-1=0]$

となる。(i) より

$$(x=y \text{ かつ } 4x^2=1) \text{ 或いは } (x=y \text{ かつ } x=-y) \Longrightarrow (0,0),(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}).$$

(ii) より

$$4(x^2+xy+y^2)-3=0 \text{ かつ } x=-y \Longrightarrow (\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2})\quad (\text{複号同順}),$$

或いは

$$4(x^2+xy+y^2)-3=0 \text{ かつ } 4(x^2-xy+y^2)-1=0 \text{ より } x+y=\pm 1 \text{ かつ } xy=\frac{1}{4} \Longrightarrow x=y=\pm\frac{1}{2}.$$

これらより、$f_x = f_y = 0$ なる点は

$$(0,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ (\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

となる。一方

$$f_{xx} = 12x^2 - 2,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 12y^2 - 2$$

だから

$$J_f = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4(6x^2-1)(6y^2-1) - 1,$$

で

$$f_x(0,0) = -2 < 0,\ J_f(0,0) = 3 > 0, \quad f_{xx}(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}) = 1 > 0,\ J_f(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}) = 0,$$

$$f_{xx}(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}) = 7 > 0,\ J_f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}) > 0, \quad f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{9}{8}$$

となる。故に、f は $(0,0)$ で極大値 0, $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2})$ で極小値 $-\frac{9}{8}$ をもつ。更に、$(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ はココマデノ計算ダケデハ極値点カドウカ判断デキナイ（本当に「極値点か判断できない」かどうかは付録に詳しく説明する）。

3 定積分の定義を用いて以下を計算せよ。

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}. \quad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)^{\beta+1}}{(1^\beta+2^\beta+\cdots+n^\beta)^{\alpha+1}}\ (\alpha,\,\beta>0).$$

証明: (a)[4] $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$ だから Riemann 積分の定義より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \log(1+x)\big|_{x=0}^{1} = \log 2$ となる。
(b)[6] 簡単な計算で

$$\begin{aligned}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)^{\beta+1} &= \left[n^{\alpha+1}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{2}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right\}\right]^{\beta+1} \\ &= n^{(\alpha+1)(\beta+1)}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}\end{aligned}$$

となり、同様に

$$(1^\beta+2^\beta+\cdots+n^\beta)^{\alpha+1} = n^{(\alpha+1)(\beta+1)}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}$$

が求まる。$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)^{\beta+1}}{(1^\beta+2^\beta+\cdots+n^\beta)^{\alpha+1}} = \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$$

4 以下の不定積分を求めよ。

$$(i) I_{m,n} = \int x^m(\log x)^n dx\ (m > -1), \qquad (ii) I_{a,b} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a < b).$$

ヒント：(i) 漸化式を考えよ。(ii) 変数変換 $t = \sqrt{(b-x)/(x-a)}$ を用いよ

証明：(i)[5] 部分積分を用いて

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]'(\log\,x)^n dx \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log\,x)^n - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n(\log\,x)^{n-1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log\,x)^n - \frac{n}{m+1}I_{m,n-1} \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log\,x)^n - \frac{n}{m+1}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}(\log\,x)^{n-1} - \frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}\right) \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[(\log\,x)^n - \frac{n}{m+1}(\log\,x)^{n-1} + (-1)^2\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(\log\,x)^{n-2}\right] + (-1)^3\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}I_{m,n-3}.
\end{aligned}
$$

これを繰り返し、$I_{m,0} = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ を用いて

$$
I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(m+1)^k}(\log\,x)^{n-k}. \qquad \square
$$

注意：$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ を用いても勿論よい。上の関数を x で微分して、不定積分の被積分関数が出てくるかどうか確かめよ。以下の問題の答えについても調べよ。

(ii)[5] 変数変換 $t = \sqrt{(b-x)/(x-a)}$ を用いて、

$$
x = \frac{b+at^2}{1+t^2},\ x-a = \frac{b-a}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2(a-b)t}{(1+t^2)^2},\ \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{-2dt}{1+t^2}
$$

となるから

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{-2dt}{1+t^2} = -2\arctan t = -2\arctan\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}. \qquad \square
$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の微分方程式を解け（即ち、関数 $y = y(x)$ で以下の微分方程式を満たすものを求めよ）：

$$
(i)\ (1-y) + (1-x)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (ii)\ \frac{dy}{dx} = \cos(x-y) - \cos(x+y).
$$

証明：(i)[4] $\frac{dy}{dx} = -\frac{1-y}{1-x}$ と書き直して（形式的に）$\frac{dy}{1-y} = -\frac{dx}{1-x}$ となる。C を定数として $\log|1-y| + \log|1-x| = \log|(1-y)(1-x)| = C$ となるから、$|(1-y)(1-x)| = e^C$ が得られる。$\pm e^C$ を C と書き直して、$y = 1 - \frac{C}{1-x}$ となる。

(ii)[6] $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y$ より $\frac{dy}{\sin y} = 2\sin x dx$ を積分すればよい。変数変換 $t = \tan(y/2)$ を用いると

$$
\cos\,y = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin y = \frac{2t}{1+t^2},\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+t^2},
$$

に注意すれば

$$
\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \log|t| = \log|\tan(y/2)| = -2\cos\,x + C
$$

だから $\pm e^C$ を C と書き直して

$$
\tan(y/2) = Ce^{-2\cos\,x}, \quad y = 2\arctan Ce^{-2\cos\,x}. \qquad \square
$$

注意：見掛け上は異なるが

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\sin y} &= \int \frac{\sin y}{1-\cos^2 y}dy = \int \frac{1}{2}\left[\frac{\sin y}{1-\cos\,y} + \frac{\sin y}{1+\cos\,y}\right]dy \overset{(i)}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos\,y}{1+\cos\,y}\right| \\
&= \int \frac{(\sin y)'}{\sin y}dy + \int \frac{1-\cos\,y}{\sin y}dy = \int \frac{(\sin y)'}{\sin y}dy + \int \frac{\sin y}{1+\cos\,y}dy \overset{(ii)}{=} \log\left|\frac{\sin y}{1+\cos\,y}\right| \\
&= \int \frac{dy}{2\sin y/2\cos\,y/2} \overset{(iii)}{=} \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos\,y/2}{\sin y/2} + \frac{\sin y/2}{\cos\,y/2}\right)dy = \log|\tan(y/2)|
\end{aligned}
$$

を用いた答案もあった。(iii) 式では $\cos^2 y/2+\sin^2 y/2=1$ を用いた。(ii) は変形すれば $\log|\tan(y/2)|$ となる。(i) を用いて計算すると $y=\arccos\frac{1-Ce^{-4\cos x}}{1+Ce^{-4\cos x}}$ となる。

注意：倍角の公式は、Euler の公式を思い出せば

$$\begin{aligned}\cos(a+b)+i\sin(a+b)=e^{i(a+b)}=e^{ia}e^{ib}&=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\\&=\cos a\cos b-\sin a\sin b+i(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\end{aligned}$$

となるから、$\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin a\sin b$ と求まる。

＝＝＝＝付録：極値点かどうかの判断＝＝＝＝

定理 0.1 偏導関数が連続な関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値になるとき

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

が成立する。さらに、(a,b) で f の 2 階偏導関数が連続のとき

$$J_f(x,y)=J(x,y)=\det\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{yx}\\f_{xy}&f_{yy}\end{pmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

として

$$\begin{cases}J(a,b)>0\text{ のとき}\begin{cases}f_{xx}(a,b)>0\text{ ならば}\quad f\text{ は }(a,b)\text{ で極小値をとる、}\\f_{xx}(a,b)<0\text{ ならば}\quad f\text{ は }(a,b)\text{ で極大値をとる、}\end{cases},\\J(a,b)<0\text{ ならば }f\text{ は }(a,b)\text{ で極値にならない、}\\J(a,b)=0\text{ ならば、ここで極値になるかどうか一般には判定できない。}\end{cases}\qquad\square$$

注意：1 変数関数の場合、f は 2 階連続微分可能とし $f'(a)=0$ とする。

$$\begin{cases}f''(a)>0\text{ ならば}\quad f\text{ は }(a,b)\text{ で極小値をとる、}\\f''(a)<0\text{ ならば}\quad f\text{ は }(a,b)\text{ で極大値をとる、}\\f''(a)=0\text{ ならば}\quad\text{ここで極値になるかどうか一般には判定できない。}\end{cases}$$

しかし、f は何回も連続微分可能とするとき、Taylor 展開を用いれば容易に、

$$\begin{cases}f^{(k)}(a)=0\ (k=1,2,\cdots,2n-1)\text{ かつ }f^{(2n)}(a)>0\text{ ならば }f\text{ は }(a,b)\text{ で極小値をとる、}\\f^{(k)}(a)=0\ (k=1,2,\cdots,2n-1)\text{ かつ }f^{(2n)}(a)<0\text{ ならば }f\text{ は }(a,b)\text{ で極大値をとる、}\\f^{(k)}(a)=0\ (k=1,2,\cdots,2n)\text{ かつ }f^{(2n+1)}(a)\neq 0\text{ ならば }f\text{ は }(a,b)\text{ で極値になるかどうか}\\\hfill\text{一般には判定できない、}\end{cases}$$

ことが分る（即ち、$f'(a)=0$、$f''(a)=0$ でも判定できる場合がある）。このような判定条件を２変数（以上の）一般の関数に対してどこまで見通し良い形で作ることができるのか？これは煩雑になるだろうし、実は私も書いたものを知らない。

$\boxed{\text{注意 2}}$ 上の判定条件は Hesse 行列 J_f の固有値がすべて正（極小）か、すべて負（極大）か、正負取り混ぜてあるが 0 はないか、固有値に 0 を含む（まだ判定できない）か、の場合に分けることに相当する。この問題の場合は、極値の候補点 $(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ での Hesse 行列 J_f の固有値が 0 を含むのである。ところで、この問題

の関数は「多項式」で、

$$
\begin{aligned}
f(a+h,b+k) =& f(a,b) + [hf_x + kf_y] + \left[\frac{f_{xx}}{2!}h^2 + \frac{f_{xy}}{1!1!}hk + \frac{f_{yy}}{2!}k^2\right] \\
&+ \left[\frac{f_{xxx}}{3!}h^3 + \frac{f_{xxy}}{2!1!}h^2k + \frac{f_{xyy}}{1!2!}h^2k + \frac{f_{yyy}}{3!}k^2\right] \\
&+ \left[\frac{f_{xxxx}}{4!}h^4 + \frac{f_{xxxy}}{3!1!}h^3k + \frac{f_{xxyy}}{2!2!}h^2k^2 + \frac{f_{xyyy}}{1!3!}hk^3 + \frac{f_{yyyy}}{4!}k^4\right] \\
=& f(a,b) + g(a,b;h,k)
\end{aligned}
$$

となる[1]。ここで $f_x = f_x(a,b)$, etc, と省略している。

$$
\begin{aligned}
&g(0,0;h,k) = -h^2 + hk - k^2 + (h^4 + k^4) \leq 0 \ (\sqrt{h^2+k^2} \text{ が十分小}), \\
&g(\pm\sqrt{3}/2, \mp\sqrt{3}/2; h,k) = 7h^2 + 2hk + 7k^2 + (h^4 + k^4) \geq 0 \ (\sqrt{h^2+k^2} \text{ が十分小}), \\
&g(\pm 1/2, \pm 1/2; h,k) = \frac{(h+k)^2}{2} \pm (h^3 + k^3) + (h^4 + k^4) \begin{cases} \geq 0 \ (h \neq -k \text{ で } \sqrt{h^2+k^2} \text{ が十分小}), \\ \geq 0 \ (h = -k \text{ でも } h^3 + k^3 = 0 \text{ だから}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

これより極値点の定義から、f は $(0,0)$ で極大、$(\pm\sqrt{3}/2, \mp\sqrt{3}/2)$ で極小、また、$(\pm 1/2, \pm 1/2)$ でも極小である。

ここで、上の定理の『$J(a,b) < 0$ ならば f は (a,b) で極値にならない』の証明[2]をしておこう。

$$\alpha = f_{xx}(a,b),\ \beta = f_{yy}(a,b),\ \gamma = f_{xy}(a,b)$$

とおき、$\gamma^2 - \alpha\beta > 0$ とする。$k \neq 0$ とし $h/k = m$ を一定にして $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$ とすると、$\alpha > 0$ ならば

$$
k^2(\alpha m^2 + 2\gamma m + \beta) \begin{cases} > 0 & (m < \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\alpha} \text{ or } m > \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\alpha}), \\ = 0 & (m = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\alpha}), \\ < 0 & (\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\alpha} < m < \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\alpha}). \end{cases}
$$

$\alpha < 0$ のときも同様の考察ができる。また $\alpha = 0$ のときは一次式だから正負の値を取る。故に、

$$f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2$$

は正負の値を取るので、f は (a,b) で <u>極値とはなり得ない</u>。

[1] $x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ はどんな変数に関しても 5 回以上微分すれば 0 となることを用いている

[2] 勿論、多項式だけでなく、一般の 2 変数関数に対して成立する