微分積分学第一　V類S組 第12回講義内容（7月13日）

合成関数の微分

１変数の場合の復習から始める。

● 合成関数の微分公式についての注意：教科書「命題2.5.1」では１階連続微分可能を仮定した。単に微分可能な場合についても公式は成立することを「全微分可能性」から導こう。

命題 0.1 $y = f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能で、$z = g(y)$ が $y_0 = f(x_0)$ で微分可能ならば、$z = g(f(x))$ は $x = x_0$ で微分可能となる。更に、その微係数は $g'(f(x_0))f'(x_0)$ である。

証明：微少な変化を新しい文字 h で表す代わりに、増分と称して Δx, etc. と書く。x の増分 Δx に対応する y の増分を Δy、これに対応する z の増分を Δz とおく。微分可能の仮定から

$$\Delta y(= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = f'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x$$

であり、$\Delta x \to 0$ のとき $\epsilon_1 \to 0$ である。また、

$$\Delta z(= g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)) = g'(y_0)\Delta y + \epsilon_2 \Delta y$$

であり $\Delta y \to 0$ のとき $\epsilon_2 \to 0$ である。これらから

$$\Delta z = (g'(y_0) + \epsilon_2)(f'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x) = g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + (g'(y_0)\epsilon_1 + \epsilon_2 f'(x_0) + \epsilon_2\epsilon_1)\Delta x$$

である。$\Delta x \to 0$ のとき、$\Delta y \to 0$ であるから、$\epsilon_2 \to 0$ かつ $\epsilon_1 \to 0$ である。これより

$$\epsilon = g'(y_0)\epsilon_1 + \epsilon_2 f'(x_0) + \epsilon_2\epsilon_1$$

とおくとき、$\Delta x \to 0$ のとき $\epsilon \to 0$ であり、これは $z = g(f(x))$ が $x = x_0$ で微分可能を意味する。　□

別法：Landau の記号を用いると

$$\begin{aligned}
g(f(x_0 + \Delta x)) &= g(f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \\
&= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] + o(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \\
&= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) \\
&= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \qquad \Box
\end{aligned}$$

● **媒介変数による微分**：２つの変数 x, y は別の変数 t を媒介して $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ と表されているとする[1]。もし、$\varphi(t)$ は狭義単調増加とすると、y は x の関数と考えることができる。このとき、$\varphi(t), \psi(t)$ が微分可能で、$\varphi'(t) \not\equiv 0$ ならば、y は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

この主張の証明から始めよう。仮定 $\varphi(t)$ は狭義単調増加から $t = \varphi^{-1}(x)$ と表現できる。これを代入して $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ となるから、これを x の関数として微分する。これは合成関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x))\frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}.$$

[1] 例えば、$x = \varphi(t) = t^2$, $y = \psi(t) = t$ と表現されていれば、$y = \sqrt{x}$ となる

一方、逆関数の微分公式は $x=\varphi(\varphi^{-1}(x))$ より

$$1=\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx},\quad \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}=\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}=\frac{1}{dx/dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

となる。これらより、

$$\frac{dy}{dx}=\psi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

標語的に

$$(*)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

これはあたかも dt を数のごとくみなして、左辺の分母分子を dt で割ったように見える。これが多変数の合成関数の微分でしばしば誤解を招くことがあるので、**見えても、そうは見ない方が安全!**である。更に、

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\right)\\&=\frac{\psi''(\varphi^{-1}(x))(d/dx)\varphi^{-1}(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))-\psi'(\varphi^{-1}(x))\varphi''(\varphi^{-1}(x))(d/dx)\varphi^{-1}(x)}{(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2}\\&=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{\varphi'^3}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

多変数の場合の合成関数の微分（連鎖公式）：

● $f(x,y)$ は全微分可能で、$x=x(t)$、$y=y(t)$ が t について微分可能であるとき、合成関数 $g(t)=f(x(t),y(t))$ は t について微分可能で次式が成立する。

$$\frac{dg(t)}{dt}=f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)+f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t),\qquad \dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt},\quad \dot{y}(t)=\frac{dy(t)}{dt}.$$

証明：t の増分を Δt とすると、x と y の増分は

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=(\dot{x}(t)+\epsilon_1)\Delta t,\quad \Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)=(\dot{y}(t)+\epsilon_2)\Delta t$$

であり、微分可能性より $\Delta t\to 0$ のとき $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$ となる。また、f の全微分可能性より

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\epsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

であり、$\Delta x,\Delta y\to 0$ のとき $\epsilon\to 0$ である。また

$$\Delta g=f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))-f(x(t),y(t))=f(x(t)+(\dot{x}(t)+\epsilon_1)\Delta t,y(t)+(\dot{y}(t)+\epsilon_2)\Delta t)-f(x(t),y(t))$$

となるから、これを Δt で割れば

$$\frac{\Delta g}{\Delta t}-f_x\dot{x}(t)-f_y\dot{y}(t)=f_x\epsilon_1+f_y\epsilon_2+\frac{\epsilon}{\Delta t}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

となる。$\Delta t\to 0$ のとき

$$\Delta x,\Delta y\to 0,\quad \text{であり、かつ}\quad \epsilon\to 0,\quad \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2\to \dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t).$$

だから、

$$\frac{dg}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=f_x\dot{x}(t)+f_y\dot{y}(t).\qquad\square$$

別法：

$$\begin{aligned}f(x(t+\Delta t),&y(t+\Delta t))=f(x(t)+x(t+\Delta t)-x(t),y(t)+y(t+\Delta t)-y(t))\\&=f(x(t),y(t))+f_x(x(t),y(t))[x(t+\Delta t)-x(t)]\\&\qquad+f_y(x(t),y(t))[y(t+\Delta t)-y(t)]+o(([x(t+\Delta t)-x(t)]^2+[y(t+\Delta t)-y(t)]^2)^{1/2})\\&=f(x(t),y(t))+f_x(x(t),y(t))[\dot{x}(t)\Delta t+o(\Delta t)]+f_y(x(t),y(t))[\dot{y}(t)\Delta t+o(\Delta t)]+o(\cdots)\\&=f(x(t),y(t))+f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)\Delta t+f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t)\Delta t+o(\Delta t).\qquad\square\end{aligned}$$

高階偏微分、C^k-級関数

関数 f が x-方向に偏微分可能であり、更に f_x が x-, y-方向に偏微分可能のとき

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x \partial_x f = \partial_x^2 f, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_y \partial_x f$$

と表示する。同様に、f_y に対し

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_x \partial_y f, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y \partial_y f = \partial_y^2 f$$

と表示する。

ところで、

$$\partial_x(\partial_y f) = f_{xy} \quad \text{と書くか} \quad f_{yx} \quad \text{と書くか?}$$

ここでは、$f_{xy} = (f_y)_x$ をとることにするが、$f_{xy} = (f_x)_y$ とする人もいる。以下に述べる理由により、この講義ではどちらを用いても良い場合を主として考えるので、それほど気にしなくて良い。f_{xy} の意味を、y で偏微分してから x で偏微分するのか、或いは、x で偏微分してから y で偏微分するのか、と決めておくことは必要。

● 一般には高階偏微分はその偏微分の順序による！

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \Longrightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

実際、$y \neq 0$ に対し

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2} = -y,$$

だから

$$f_{yx}(0,0) = \frac{d}{dy}f_x(0,y)\bigg|_{y=0} = -1.$$

同様に $x \neq 0$ に対し

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{x(x^2-k^2)}{x^2+k^2} = x,$$

だから

$$f_{xy}(0,0) = \frac{d}{dx}f_y(x,0)\bigg|_{x=0} = 1.$$

ところで次の定理が成立することを注意しておく。

定理 0.1 (Schwarz) 点 (a,b) の近くで f_x, f_y, f_{xy} が存在して、f_{yx} が (a,b) で連続ならば、$f_{xy}(a,b)$ も存在して、(a,b) で $f_{xy} = f_{yx}$。

証明：$\varphi(x,y) = f(x,y) - f(x,b)$ とおく。h と k を十分小さくとり、$\varphi(x,b+k)$ に平均値の定理を適用する。

$$\begin{aligned}\varphi(a+h,b+k) - \varphi(a,b+k) &= h\varphi_x(a+\theta h, b+k) \quad (0<\theta<1) \\ &= h[f_x(a+\theta h,b+k) - f_x(a+\theta h,b)].\end{aligned}$$

更に $f_x(a+\theta h, y)$ に平均値の定理を適用して、

$$\varphi(a+h,b+k) - \varphi(a,b+k) = hkf_{yx}(a+\theta h, b+\theta' k), \quad 0<\theta'<1. \qquad (*)$$

ここで、仮定 $\lim_{k'\to 0}\varphi(x,b+k')/k' = f_y(x,b)$ が存在することと、(*) から

$$\begin{aligned}f_y(a+h,b+k) - f_y(a,b+k) &= \lim_{k'\to 0}\frac{\varphi(a+h,b+k+k') - \varphi(a,b+k+k')}{k'} \\ &= h\lim_{k'\to 0} f_{yx}(a+\theta h, b+k+\theta' k') \overset{(1)}{=} hf_{yx}(a+\theta h, b+k)\end{aligned}$$

となることが分かる。従って

$$\begin{aligned} f_{xy}(a,b) &= \lim_{h\to 0}[f_y(a+h,b)-f_y(a,b)]/h \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} f_{yx}(a+\theta h, b+k) \\ &\overset{(2)}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(a+\theta h, b+k) \overset{(1)}{=} f_{yx}(a,b). \end{aligned}$$

ここで、「仮定 f_{yx} が連続」は $\overset{(1)}{=}$ で用い、前回考えておくように言った性質[2]を用いて $\overset{(2)}{=}$ を示した。 □

以下では、$f_{xy}=f_{yx}$ となるような関数達を考える方が都合が良い。そこで、次のような定義を導入する：

定義 0.1 $f(x,y)$ が C^2-級であるとは、２回偏微分可能であり、全ての２階偏導関数

$$f_{xx}(x,y), \quad f_{xy}(x,y), \quad f_{yx}(x,y), \quad f_{yy}(x,y)$$

が連続になることである。

より一般に C^k-級関数とは

$$\frac{\partial^{\ell+m}f}{\partial x^\ell \partial y^m} \quad \ell+m\le k$$

が存在し、連続なるものとして定義する。

多変数の Taylor の定理と極大、極小

● **Taylor の定理（１変数の場合）**：

定理 0.2 I を $\mathbb{R}$ の開区間とし $f\in C^k(I)$ とすると、$a\in I,\ x\in I$ に対して

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j+R_k, \quad R_k=\frac{1}{k!}f^{(j)}(a+\theta(x-a))(x-a)^k, \quad (\exists\theta\in(0,1)).$$

この定理の証明は補助関数 g を

$$g(x)=\sum_{j=0}^{k-1}f^{(j)}(x)\frac{(b-x)^j}{j!}+A(b-x)^k$$

とし $g(a)=g(b)$ となるように A を定め、Rolle の定理を用いれば良かった。

これを用いて、関数の極大・極小を計算したことを思い出そう。

定義 0.2 $f\in C(I)$ が $x=c$ で極大になっているとは、ある $\delta>0$ があって $(c-\delta,c+\delta)\subset I$ であり、

$$f(x)\le f(c), \quad \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$$

となることである。このとき、$f(c)$ を極大値という。

注意：より詳しく、広義の極大とか、極小とかいう概念について、その名前の付け方から定義を類推せよ。また、点 $x=c$ が区間 I の境界にある場合は、どう定義したら良いか、各自考えよ。

命題 0.2 区間 I で定義された関数 $f\in C^2(I)$ が、区間内の点 c で

$$f'(c)=0, \quad f''(c)<0$$

となるならば、関数 f は $x=c$ で極大値をとる。

[2] これがどの問題だったかも考えておいて欲しい

● 2 変数の Taylor の定理

講義では次のように考えた：$f(x,y)$ の (a,b) での挙動を、関数

$$g(t) = f(a+t(x-a), b+t(y-b)), \qquad g(0) = f(a,b), \quad g(1) = f(x,y)$$

を用いて調べる。$g(t)$ は 1 変数関数だから、それに Taylor の定理を用いて 2 回微分まで考えると

$$g(t) = g(0) + \dot{g}(0)t + \frac{\ddot{g}(\theta t)}{2!}t^2 \qquad 0 < \exists\theta < 1.$$

となる。故に、

$$g(1) - g(0) = f(x,y) - f(a,b) = \dot{g}(0) + \frac{\ddot{g}(\theta)}{2!}$$

となる。ここで、$x(t) = a + t(x-a)$、$y(t) = b + t(y-b)$ と書いて、合成関数の微分を実行してみる。

$$\dot{g}(t) = f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t), \qquad \dot{g}(0) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

また

$$\begin{aligned}\ddot{g}(t) =& (f_{xx}(x(t),y(t))\dot{x}(t) + f_{yx}(x(t),y(t))\dot{y}(t))\dot{x}(t) + f_x(x(t),y(t))\ddot{x}(t) \\ &+ (f_{xy}(x(t),y(t))\dot{x}(t) + f_{yy}(x(t),y(t))\dot{y}(t))\dot{y}(t) + f_y(x(t),y(t))\ddot{y}(t)\end{aligned}$$

$\ddot{x}(t) = 0$、$\ddot{y}(t) = 0$ だから $0 < \exists\theta < 1$ があって

$$\begin{aligned}f(x,y) - f(a,b) =& f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\big[f_{xx}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)^2 + f_{xy}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(y-b)(x-a)\big] \\ &+ \frac{1}{2}\big[f_{yx}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)(y-b) + f_{yy}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(y-b)^2\big].\end{aligned}$$

これから推測されるように、より一般的には以下のようになる：

定理 0.3 (Taylor の定理) 長方形領域 $I \times J$ 上で $f \in C^n(I \times J)$ とすると、

$$f(x,y) = \sum_{j+k=0}^{n-1} \frac{1}{j!k!}\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a,b)(x-a)^j(y-b)^k + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \sum_{j+k=n} \frac{1}{j!k!}(x-a)^j(y-b)^k\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)), \quad (\exists\theta \in (0,1)).$$

● 極大値、極小値を求める一つの方法

命題 0.3 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^2(I \times J)$ が、領域の点 (a,b) で

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0, \quad \text{かつ} \quad H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{が負定値行列}$$

となるとする。すると、関数 f は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる。

定義 0.3 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^1(I \times J)$ に対し、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を関数 $f(x,y)$ の停留点 *(stationary point)* という。

定義 0.4 $n \times n$-行列 $A = (a_{ij})$ が負定値行列であるとは、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\cdots,0)\}$ に対して

$$\xi \cdot A\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j < 0$$

となることである。

特に $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が負定値行列となる必要十分条件は

$$a < 0,\ c^2 - ab < 0$$

である。実際、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\xi_1(a\xi_1 + c\xi_2) + \xi_2(c\xi_1 + b\xi_2) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2 < 0$$

となるための条件は、上に述べたものである。

命題 0.3 の証明: さて、$f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$ だから

$$f(x,y) = f(a,b) + R_2,$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\cdots)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\cdots)(y-b)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(x-a, y-b) \cdot H_f(\cdots) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \quad H_f(\cdots) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\cdots) & f_{yx}(\cdots) \\ f_{xy}(\cdots) & f_{yy}(\cdots) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但し、記法上 $(\cdots) = (a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))$ とした。$f \in C^2(I \times J)$ であるから、$H_f(a,b)$ は負定値行列という仮定より、$(\cdots)$ が (a,b) の十分近くにあるとき $H_f(\cdots)$ も負定値行列。あとは、１変数の場合と同様の議論で、(x,y) が (a,b) の十分近くにあるとき

$$f(x,y) \leq f(a,b) \quad \text{即ち、} f(x,y) \text{ は } (a,b) \text{ で極大.} \quad \square$$

注意：$H_f(a,b)$ が負定値でも正定値でもない場合、点 (a,b) が極値を与える点かどうか、一般的な判断はできない。関数の停留点であってそこで極値を与える点を**極値点**という。極値点以外の停留点は以下に説明する。

定義 0.5 一般に点 (a,b) は、二つのベクトル $(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) \neq 0$ が存在して t に関する関数 $g(t) = f(a + tx_1, b + ty_1)$ が $t = 0$ で極小、s に関する関数 $h(s) = f(a + sx_2, b + sy_2)$ が $s = 0$ で極大となるとき、関数 $f(x,y)$ の**峠点**という。

例えば、関数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ に対する停留点 $(0,0)$ は、$f(x,0) = x^2$ が $x = 0$ で極小値、$f(0,y) = -y^2$ が $y = 0$ で極大値を持つので、峠点である。

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

より一般に、関数 $f(x,y)$ に対する停留点 (a,b), $f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b) = 0$, で

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) - \lambda & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) - \lambda \end{pmatrix} = \det(H_f(a,b) - \lambda \mathbb{I}_2) \\ &= \lambda^2 - (f_{xx}(a,b) + f_{yy}(a,b))\lambda + f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)f_{yx}(a,b) = 0 \end{aligned}$$

を満たす実根[3] λ_1, λ_2 の性質を調べる。これらは停留点 (a,b) での Hessian（ヘッセ行列）$H_f(a,b)$ に対応する固有値[4]になり、以下のように分類される。

(i) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ ならば停留点 (a,b) は極小点、

(ii) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ ならば停留点 (a,b) は極大点、

(iii) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ ならば停留点 (a,b) は峠点、

(iv) $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ならばその停留点 (a,b) の近辺の関数の挙動はこの情報だけでは不明。

[3]実数値解のこと。この式は虚根（虚数値解というのか？）を持たないことはすぐ分かる

[4]行列とその固有値については線形代数の講義で説明される

より一般的な合成関数の微分について

● 変数変換

$$(u,v)\to(x,y):\quad x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v)$$

を与え、合成関数 $g(u,v)=f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ を考える。定理 2.5.2(p.77) に述べた条件下で

$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

となることは、明らかであろう。

● 特に応用として極座標変換を考察する。

$$(r,\theta)\to(x,y):\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

とするとき、$\tilde{u}(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと、

$$\tilde{u}_r(r,\theta)=\frac{\partial\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,$$
$$\tilde{u}_\theta(r,\theta)=\frac{\partial\tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-u_xr\sin\theta+u_yr\cos\theta$$

となる。但し、$u_x=u_x(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $u_y=u_y(r\cos\theta,r\sin\theta)$ の意味である。

更に

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{rr}(r,\theta)&=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2}=(u_{xx}\cos\theta+u_{yx}\sin\theta)\cos\theta+(u_{xy}\cos\theta+u_{yy}\sin\theta)\sin\theta\\
&=u_{xx}\cos^2\theta+(u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\theta+u_{yy}\sin^2\theta,\\
\tilde{u}_{\theta r}(r,\theta)&=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta\partial r}=(-u_{xx}r\sin\theta+u_{yx}r\cos\theta)\cos\theta-u_x\sin\theta+(-u_{xy}r\sin\theta+u_{yy}r\cos\theta)\sin\theta+u_y\cos\theta\\
&=(-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta+u_{yx}r\cos^2\theta-u_{xy}r\sin^2\theta-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta,\\
\tilde{u}_{r\theta}(r,\theta)&=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial r\partial\theta}=-(u_{xx}\cos\theta+u_{yx}\sin\theta)r\sin\theta-u_x\sin\theta+(u_{xy}\cos\theta+u_{yy}\sin\theta)r\cos\theta+u_y\cos\theta\\
&=(-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta-u_{yx}r\sin^2\theta+u_{xy}r\cos^2\theta-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta,\\
\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta)&=\frac{\partial^2\tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta^2}=-(-u_{xx}r\sin\theta+u_{yx}r\cos\theta)r\sin\theta+(-u_{xy}r\sin\theta+u_{yy}r\cos\theta)r\cos\theta-u_xr\cos\theta-u_yr\sin\theta\\
&=u_{xx}r^2\sin^2\theta+u_{yy}r^2\cos^2\theta-(u_{yx}+u_{xy})r^2\cos\theta\sin\theta-u_xr\cos\theta-u_yr\sin\theta,
\end{aligned}$$

となることが示される。前と同様、$u_{xx}=u_{xx}(r\cos\theta,r\sin\theta)$, etc である。これらから、

$$\tilde{u}_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}\tilde{u}_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta)=(u_{xx}+u_{yy})(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

$$\tilde{u}_r^2(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_\theta^2(r,\theta)=(u_x^2+u_y^2)(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

となる。

ここで、

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

をラプラシアン (Laplacian)、ラプラス作用素という。これの n-次元版は

$$\Delta u(x)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

となる。

次のような質問があった。

$$\tilde{u}_r(r,\theta) = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u,$$
$$\tilde{u}_\theta(r,\theta) = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta = \Big(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u$$

となる。そこで

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{rr}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2} = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 u = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y)\\ &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y)\\ &= u_{xx}\cos^2\theta + (u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta, \quad \underline{\cos\theta, \sin\theta \text{ は } x, y \text{ と無関係と考えて計算して}}\text{！}\end{aligned}$$

と計算して良いのか？正しい！この時の計算過程では右辺の u は x, y の関数として計算し、最後に $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と代入している。このような計算方法は、例えば、吹田–新保「理工系の微分積分学」pp.166-167 でも用いられている。しかし、この計算方法は慣れないうちは「変数をどうとっているのか混乱し」間違いやすいので、講義中のような計算をすることをすすめている。もう少し詳しくはすぐ後に説明してある。

メモ：出席者は８０名弱か？講義時間が不足気味なのに、当局の行なう「学生の授業評価」で時間が取られるとは、何ということか。

変数変換則（合成関数の微分則)、多変数関数の極値、が今学期後半の主たる学習事項の一つであった。この部分を８月３日までに是非とも勉強しておくように期待する。例えば、演習での問題も検討しておくように。

%%%%%%

念のために、変数変換則（合成関数の微分則）の例や関数の極値の求め方の例を挙げておく：

$\boxed{1}$ θ を定数、$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ とする。関数 $f = f(x,y)$ と $x = u\cos\theta - v\sin\theta$、$y = u\sin\theta + v\cos\theta$ との合成関数を $F = F(u,v)$、 すなわち、

$$F(u,v) = f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)$$

とする。このとき以下の問に答えよ。

(1) F_u と F_v を f_x と f_y を用いて表わせ。

解答例：記述を簡単にするために、$a = \cos\theta, b = \sin\theta$ とおく。

$$F(u,v) = f(au - bv, bu + av), \quad F_u = f_x a + f_y b, \quad F_v = -f_x b + f_y a$$

より

$$\begin{pmatrix} F_u(u,v) \\ F_v(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=au-bv,\\ y=bu+av}}$$

(2) f_x と f_y を F_u と F_v を用いて表わせ。

解答例：$a^2 + b^2 = 1$ を用いて

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

となるから、(1) で求めた関係式にこの逆行列を施して

$$\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_u(u,v) \\ F_v(u,v) \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{u=ax+by,\\ v=-bx+ay}}$$

間違った答案の典型例：『(1) と同様に

$$f_x = F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x}$$

とする。ここで、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\partial x/\partial u} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\partial x/\partial v} = -\frac{1}{\sin\theta}$$

として、これを上式に代入する』としたものである。これは、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{dt/dx}$$

を２変数以上の関数に対しても適用したとき生じる間違いで、講義中に「してはならないと注意した」もの である。

上の議論を訂正するには、以下のようにすると良い。まず、

$$\text{変数変換}\quad x = au - bv,\ y = bu + av \quad \text{を逆に解いて} \quad u = ax + by,\ v = -bx + ay$$

を用い

$$F(u,v)\Big|_{\substack{u=ax+by,\\ v=-bx+ay}} = F(ax+by, bx-ay)$$

とし

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a,\ \frac{\partial v}{\partial_x} = b$$

に注意するならば、求める式が (1) と同様にして得られる。

(3) 等式 $F_{uu}(u,v) + F_{vv}(u,v) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を証明せよ。

解答例：$F_u = f_x a + f_y b,\ F_v = -f_x b + f_y a$ をもう一度偏微分して

$$F_{uu} = (f_{xx}a + f_{yx}b)a + (f_{xy}a + f_{yy}b)b, \quad F_{vv} = -(-f_{xx}b + f_{yx}a)b + (-f_{xy}b + f_{yy}a)a,$$

となるから

$$F_{uu} + F_{vv} = (a^2+b^2)f_{xx} + ab(f_{yx} + f_{xy} - f_{yx} - f_{xy}) + (a^2+b^2)f_{yy} = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)\Big|_{\substack{x=au-bv,\\ y=bu+av}}.$$

間違った答案の典型例：

$$\begin{aligned} F_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\cos\theta\Big) + \frac{\partial}{\partial u}\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\sin\theta\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\sin\theta = f_{xx}\cos^2\theta + f_{yy}\sin^2\theta \end{aligned}$$

とし、同様に

$$f_{vv} = f_{xx}\sin^2\theta + f_{yy}\cos^2\theta \quad \text{を得るから} \quad F_{uu} + F_{vv} = f_{xx} + f_{yy}$$

としたは０点！何故か？

$$\begin{aligned} F_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\frac{\partial x}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial u}\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial y}{\partial u}\Big) \\ &= \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\Big]\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\Big]\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ &= f_{xx}\cos^2\theta + (f_{xy} + f_{yx})\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\sin^2\theta \end{aligned}$$

となるのが、正しい計算！

$\boxed{2}$ 関数 $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ に対して、以下の問に答えよ。

(1) f の１階および２階の偏導関数を全て求めよ。

解答例：１階偏導関数は $f_x = (y-2x^2y)e^{-x^2-y^2}$, $f_y = (x-2xy^2)e^{-x^2-y^2}$ となる。

$$f_{xx} = (-4xy - 2x(y-2x^2y))e^{-x^2-y^2} = -2xy(3-2x^2)e^{-x^2-y^2},$$
$$f_{yx} = (1-2y^2)(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = f_{xy}, \quad f_{yy} = -2xy(3-2y^2)e^{-x^2-y^2}. \qquad \square$$

(2) f の停留点を全て求めよ。

解答例：$f_x = 0$, $f_y = 0$ より

$$y(1-2x^2) = 0, x(1-2y^2) = 0$$

を満たす点が停留点であり、

$$(0,0),\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

である。 $\square$

(3) f の極値点を全て求め、極大・極小を判定せよ。

解答例：点 (a,b) でのヘッセ行列は

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}, \quad D_f(a,b) = f_{xy}(a,b)f_{yx}(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

であり、

$$f_{xx}(a,b) > 0, \quad D_f(a,b) < 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極小値},$$
$$f_{xx}(a,b) < 0, \quad D_f(a,b) < 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極大値},$$

となる。

$$f_{xx}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0), \quad f_{xy}(0,0) = 1, \quad D_f(0,0) = 1, \quad (0,0) \text{ は極値ではない},$$
$$f_{xx}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{3}{2e} < 0, \quad D_f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{9}{4e^2} < 0, \quad (\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \text{ は極大値（複号同順）},$$
$$f_{xx}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2e} > 0, \quad D_f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{9}{4e^2} < 0, \quad (\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \text{ は極小値（複号同順）}. \qquad \square$$