「V 類 S 組　微分積分学第１中間試験解答例」　井上

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の方程式を解け.

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}x=\frac{\pi}{4}$$

解答例 [5 点]：$\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{3}$, $\beta=\tan^{-1}\frac{1}{5}$, $\gamma=\tan^{-1}x$, 即ち、$\tan\alpha=1/3$, $\tan\beta=1/5$, $\tan\gamma=x$ とおく。６月１日の講義で言及した tan の加法公式を用いて

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\tan\gamma}{1-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\tan\gamma}=\tan\pi/4=1$$

となる。条件の数値を代入して

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\frac{4}{7}+x}{1-\frac{4}{7}x}=\frac{4+7x}{7-4x}=1\Longrightarrow x=\frac{3}{11}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ の第 n 次導関数を求めよ。

解答例 [5 点]：まず

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

と変形すれば、簡単に

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\Bigg((-1)^n n!(x-1)^{-n-1}-(-1)^n n!(x+1)^{-n-1}\Bigg)=\frac{(-1)^n n!}{2}\big((x-1)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\big).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数の定義域と導関数を求めよ。

$$f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

解答例 [5 点]：$\sin f(x)=g(x)\in[-1,1]$、 $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$ で $1+x\neq 0$ だから

$$-1\le g(x)=\frac{1-x^2}{(1+x)^2}\le 1\Longrightarrow -2(1+x)\le 0,\ 0\le 2x(x+1).$$

故に、f の定義域は $x\ge 0$ である。合成関数の微分則から

$$\cos f(x)\cdot f'(x)=g'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2},\quad f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2\cos f(x)}$$

であり

$$\cos f(x)=\pm\Bigg(1-\sin^2 f(x)\Bigg)^{1/2}=\pm\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

となる。$f(x)\in[-\pi/2,\pi/2]$ だから $\cos f(x)\ge 0$ である。故に、

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}.\qquad\square$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) n を <u>2 より大きな任意の</u> 自然数とする。x に関する方程式

$$e^x=x+n$$

の $x>0$ における解はただ１つ存在し、それは区間 $\big(\log n,\log(2n)\big)$ にあることを示せ。
(2) [この問には <u>答える必要は無い</u> が、正解者には 10 点までを与える] (1) で得られた解を a_n としたとき、

$$\lim_{n\to\infty}\big(a_n-\log n\big)=0$$

が成り立つことを示せ。さらに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}\,(a_n-\log n)$$

の値を求めよ。

解答例 ：(1) [5 点] $f(x)=e^x-x-n$ とおくと、$x>0$ で $f'(x)=e^x-1>0$ だから f は $x>0$ で狭義単調増加である。一方 $f(\log n)=n-\log n-n=-\log n<0$ である。また、$f(\log(2n))=2n-\log 2-\log n-n=n-\log n-\log 2>0$ である。ここで $g(x)=x-\log x$ とおくと $x>1$ で $g'(x)=1-\frac{1}{x}>0$ であり $3>e>2$ より $g(2)=2(1-\log 2)>0$ を用いている。

故に、中間値の定理で区間 $\big(\log n,\log(2n)\big)$ に $f(x)=0$ なる解が唯一つある。

ーーーーーーーーーーーーーーー

(2) $a_n\in\big(\log n,\log(2n)\big)$ で $e^{a_n}=a_n+n$、対数をとって $a_n=\log(a_n+n)$ だから、

$$0=\log n-\log n<a_n-\log n=\log(a_n+n)-\log n=\log\left(1+\frac{a_n}{n}\right).$$

$a_n\in\big(\log n,\log(2n)\big)$ を再度用いて

$$\frac{\log n}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{\log(2n)}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$$

だから、

$$\lim_{n\to\infty}\big(a_n-\log n\big)=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{a_n}{n}\right)=0.$$

さて

$$\frac{n}{\log n}\,(a_n-\log n)=\frac{n}{\log n}\log\left(1+\frac{a_n}{n}\right)=\log\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}}=\log\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}\frac{a_n}{\log n}}$$

であり、上で $1\le\frac{a_n}{\log n}\le 1+\frac{\log 2}{\log n}$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}=1$ が分かっている。$b_n=\frac{a_n}{n}$ とおくと $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}\,(a_n-\log n)=1.\qquad\square$$

この最後の部分で、「$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x}=1$ と、収束する数列の部分列も同じ極限に収束する」を用いているのだが、気がついただろうか？

＝＝＝＝＝＝

メモ：121 名の受験者がいた。通常は 80 名強の受講者だから「これが試験の威力か」。後で、「授業では抽象的なことばかりだったのに、こんな具体的な計算問題だけとは？」とか「何故証明問題が無いのですか」という声が聞こえた。期末試験では是非とも期待に応えられるような証明問題を考えるか、探してくるかしなければならなくなった。

これから、採点と言う相当な労働があるのだが、マークシート方式だと楽だろうな！

諸君の書いてくれた感想やこれから送られてくるだろうメールをまとめたものは、近々ホームページに掲載する予定である。