微分積分学第一　Ｖ類Ｓ組 講義内容まとめ

● この学期の講義内容まとめ。

- 実数の性質、数列の収束：$\epsilon - N$ 論法、Bolzano-Weierstrass の補題、Cauchy 列、
- 関数、関数の極限、連続：$\epsilon - \delta$ 論法、最大値・最小値、
- 中間値の定理、逆関数の定義、
- 微分可能性、合成関数の微分、高階微分、C^n-級関数、
- Rolle の定理、平均値の定理、Cauchy の平均値の定理、l'Hospital の法則、
- Taylor の定理、剰余項、極大・極小値、Taylor 展開、（１変数）
- 多変数関数、距離関数、
- 多変数関数の極限、連続：$\epsilon - \delta$ 論法、
- 偏微分可能性、合成関数の偏微分、全微分可能性、高階微分、C^n-級関数、
- Taylor の定理、剰余項、極大・極小値、Taylor 展開、（多変数）
- 座標変換と微分の関係式。

● Taylor の定理と Taylor 展開（1 変数の場合）：

定理 0.1 (Taylor の定理) I を $\mathbb{R}$ の開区間とし $f \in C^k(I)$ とすると、$a \in I,\ x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_k, \quad R_k = \frac{1}{k!} f^{(j)}(a + \theta(x-a))(x-a)^k, \quad (\exists \theta \in (0,1)).$$

剰余項についての注意：Lagrange の剰余と Cauchy の剰余、考え方は極めて簡単！補助関数 g を

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(x) \frac{(b-x)^j}{j!} + A_k(b-x)^k, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とし $g(a) = g(b)$ となるよう k 毎に A_k を定め、Rolle の定理を用いれば定理が証明された。このとき $A_k(b-x)^k$ は $k = n$ ならば Lagrange の剰余、$k = 1$ ならば Cauchy の剰余となった。これらの「表示の違い」は、剰余項の評価に用いられた。

定義 0.1 (Taylor 展開) 関数 $f \in C^\infty(I)$ が $x = c$ で *Taylor* 展開可能とは、*Taylor* の定理の剰余項について

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

が成立することである。このとき、

$$f(x) = \sum_{j}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(c)(x-c)^j$$

と書き、これを *Taylor* 級数と言い、この級数を求めることを、関数 f を $x = c$ で *Taylor* 展開するとも言う。また、$c = 0$ としたものを、*Maclaurin* 級数とも言う。

例えば、$|x|<1$ で以下の形式的な展開を考える。

$$f(x)=\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ となるから、Cauchy の剰余を用いると

$$|R_n|=\frac{|x|^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n},\qquad 0<\theta<1,\quad |x|<1.$$

ここで、$0<(1-\theta)/(1+\theta x)<1$ となるから

$$|R_n|=\frac{|x|^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\leq\frac{|x|^n}{1+\theta x}\leq\frac{|x|^n}{1-|x|}\to 0\quad(n\to\infty).$$

故に、上での「形式的展開」が正当化された！

しかし、Lagrange の剰余を用いると

$$|R_n|=\frac{1}{n}\left|\frac{x^n}{(1+\theta x)^n}\right|$$

となるから、上に述べた論法では $\lim_{n\to\infty}|R_n|=0$ とは言えない。

● **e が無理数なること**を証明しよう。

$f(x)=e^x$ として原点で展開すると

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\quad(0<\theta<1).$$

ここで、$x=1$ とおくと

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}\quad(0<\theta<1).\tag{1}$$

これより、$2<e=\lim_{k\to\infty}(1+1/k)^k<3$ なることが分かる[1]。

背理法で証明する：もし e が有理数で正の整数 m,n で $e=m/n$ と表示できたとする。(1) の両辺に $n!$ をかけると、$n!e^{\theta}/(n+1)!=e^{\theta}/(n+1)$ は整数でなければならない。また、$0<\theta<1$ より $e^{\theta}<e<3$ だから $1\leq e^{\theta}/(n+1)<3/(n+1)$ となる。故に、 $n+1<3$ でなければならない。n は正整数としたから $n=1$ となり、$e=m/n=m$ が整数でなければならず、これは最初に述べた $2<e<3$ に矛盾する。 $\square$

● Taylor の定理と Taylor 展開（多変数の場合）：

定理 0.2 (Taylor の定理) 長方形領域 $I\times J$ 上で $f\in C^n(I\times J)$ とすると、

$$f(x,y)=\sum_{j+k=0}^{n-1}\frac{1}{j!k!}\frac{\partial^{j+k}f}{\partial x^j\partial y^k}(a,b)(x-a)^j(y-b)^k+R_n$$

となる。ここで

$$R_n=\sum_{j+k=n}\frac{1}{j!k!}(x-a)^j(y-b)^k\frac{\partial^{j+k}f}{\partial x^j\partial y^k}(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)),\quad(\exists\theta\in(0,1)).$$

上記の 2 変数の Taylor の定理は

$$g(t)=f(x+th,y+tk),\quad g(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}(0)}{j!}t^j+\frac{g^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n$$

[1] 前に $e_k=(1+1/k)^k$ が上に有界な数列なることを示す時 $e<3$ は証明した

の右辺を、合成関数の微分公式を用いて展開すれば良い。ここで、

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} h^{n-r} k^r \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\,\partial y^r}(x+th, y+tk),$$

に注意する[2]と、上の定理が従うことが分かる。また、上式を標語的に

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+th, y+tk)$$

と書くことがある。

この合成関数の微分公式を証明するとき全微分という概念や、Landau の記号を用いたことを思い出して欲しい。

● 変数変換

$$(u,v) \to (x,y): \quad x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

を与え、合成関数 $g(u,v) = f(\phi(u,v), \psi(u,v))$ を考える。定理 2.5.2(p.77) に述べた条件下で

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\
\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned}$$

となることは、明らかであろう。

● 特に応用として極座標変換を考察する。

$$(r,\theta) \to (x,y): \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

とするとき、$\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(r,\theta) &= \frac{\partial \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \\
\tilde{u}_\theta(r,\theta) &= \frac{\partial \tilde{u}(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta
\end{aligned}$$

となる。但し、$u_x = u_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $u_y = u_y(r\cos\theta, r\sin\theta)$ の意味である。

更に

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{rr}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2} = (u_{xx}\cos\theta + u_{yx}\sin\theta)\cos\theta + (u_{xy}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)\sin\theta \\
&= u_{xx}\cos^2\theta + (u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta, \\
\tilde{u}_{\theta r}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta\partial r} = (-u_{xx}r\sin\theta + u_{yx}r\cos\theta)\cos\theta - u_x\sin\theta + (-u_{xy}r\sin\theta + u_{yy}r\cos\theta)\sin\theta + u_y\cos\theta \\
&= (-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta + u_{yx}r\cos^2\theta - u_{xy}r\sin^2\theta - u_x\sin\theta + u_y\cos\theta, \\
\tilde{u}_{r\theta}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r\partial\theta} = -(u_{xx}\cos\theta + u_{yx}\sin\theta)r\sin\theta - u_x\sin\theta + (u_{xy}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)r\cos\theta + u_y\cos\theta \\
&= (-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta - u_{yx}r\sin^2\theta + u_{xy}r\cos^2\theta - u_x\sin\theta + u_y\cos\theta, \\
\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta^2} = -(-u_{xx}r\sin\theta + u_{yx}r\cos\theta)r\sin\theta + (-u_{xy}r\sin\theta + u_{yy}r\cos\theta)r\cos\theta - u_x r\cos\theta - u_y r\sin\theta \\
&= u_{xx}r^2\sin^2\theta + u_{yy}r^2\cos^2\theta - (u_{yx}+u_{xy})r^2\cos\theta\sin\theta - u_x r\cos\theta - u_y r\sin\theta,
\end{aligned}$$

となることが示される。前と同様、$u_{xx} = u_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, etc である。これらから、

$$\tilde{u}_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\tilde{u}_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta) = (u_{xx}+u_{yy})(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

[2] 数学的帰納法で示してみよ

$$\tilde{u}_r^2(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_\theta^2(r,\theta)=(u_x^2+u_y^2)(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

となる。 これらの３次元版は物理や化学でも良く使われるので各自検討しておくことを奨める。

ここで、

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

をラプラシアン (Laplacian)、ラプラス作用素という。これの n-次元版は

$$\Delta u(x)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

となる。

講義後の質問の中から:

(1) $df(x(t),y(t))/dt=f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)+f_y(x(t),y(t))\dot{y}(t)$ なのだから

$$df(x(t),y(t),z(t))/dt=f_x(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t)+f_y(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t)+f_z(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)$$

となるのだろうが、何故 “バラケル？” のだろう？

$$\begin{aligned}&\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h}\\&\quad=\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t+h))+f(x(t),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h}\\&\quad=\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t+h))}{x(t+h)-x(t)}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\\&\qquad+\frac{f(x(t),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{y(t+h)-y(t)}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\end{aligned}$$

と変形すれば、何故 “バラケル？” かについて “ほぼ” 見当がつこう。勿論上の式で

$$\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t+h))}{h}=\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t+h))}{x(t+h)-x(t)}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

と変形し、$h\to 0$ とすれば

$$f_x(x(t),y(t))\dot{x}(t)$$

となるとすることには、問題がある。即ち、分母に出てくる $x(t+h)-x(t)$ が０になる可能性がある。それを避ける為に６月８日講義録のように合成関数の微分公式を導いた！そこで Landau の記号 $o(\cdot)$ を用いた。

(2) 教科書に「近い」とは何か？と書いて、距離関数が導入されている。結局「近い」とは何ですか？という質問があった。

「近い」とか「遠い」というのは、測り方による。例えば、「物理的に近い」と「精神的に近い」というのを考えてみたら分かる。しかし計量的に「比較する」ときは数値で状態を表現し、それの大小で、「大きい小さい」とか「近い遠い」などと言う。物理的距離と言うのは、直線で行くより、寄り道すれば遠くなるということを、３角不等式なる不等式で表現できるものとして導入された。

(3) Taylor 展開での剰余項が $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ というのが分からない？

まず、関数 f が C^n-級のとき Taylor の定理は

定理 0.3 (Taylor の定理) 区間 I 上で $f\in C^n(I)$ とすると、

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j+R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), \quad (\exists\theta \in (0,1)), \\ \dfrac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), \quad (\exists\theta \in (0,1)), \end{cases}$$

等と表現される。

この式の剰余項の形を得るには工夫が必要であり、それは 6 月 29 日の講義録を参照のこと。

(4) Hesse 行列が負定値ということを教科書ではその行列の固有値が 2 つとも負と書いてある。どうしてか？この質問は良い質問である。

$$\begin{aligned} &\text{対称行列 } H = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \text{ が負定値} \\ &\Longleftrightarrow \text{任意の } (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ に対して} \\ &\qquad\qquad (\xi,\eta)H\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \alpha\xi^2 + 2\gamma\xi\eta + \beta^2\eta^2 < 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma^2 - \alpha\beta < 0 \end{aligned}$$

とする。固有値 λ_1, λ_2 は

$$\det(H - xI) = \det\begin{pmatrix} \alpha - x & \gamma \\ \gamma & \beta - x \end{pmatrix} = (\alpha-x)(\beta-x) - \gamma^2 = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta - \gamma^2 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = 0$$

と定義される。λ_1, λ_2 が共に負とすると

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha + \beta < 0, \quad \lambda_1{\cdot}\lambda_2 = \alpha\beta - \gamma^2 > 0.$$

故に

$$\alpha + \beta < 0, \quad \alpha\beta - \gamma^2 > 0 \Longleftrightarrow \alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma^2 - \alpha\beta < 0$$

を示せば良い。これは明らかではないだろうか？

(5) x、y を媒介変数 t の関数 $x = x(t)$、$y = y(t)$ とすると、y は x の関数でありその微分は $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ となることを 6 月 8 日講義録に説明した。これは形式的に dt を数のように扱ってそれで通分したものの様に見えるが、そうすると困ったことが起こることもそこで注意した。

例えば、$\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ として

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

と書けるが、∂x や ∂y を通分して

$$\frac{\partial f \cancel{\partial x}}{\cancel{\partial x}\ \partial r} + \frac{\partial f \cancel{\partial y}}{\cancel{\partial y}\ \partial r} = 2\frac{\partial f}{\partial r}$$

等としてはイケナイ！

(6) 距離関数 d_p で何故 $d_\infty(x,0) = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots\}$ となるのか？

$$a > 0,\ b > 0 \Longrightarrow \lim_{p\to\infty}(a^p + b^p)^{1/p} = \max\{a,b\}.$$

(7) 全微分可能にかかわる質問は多いが、6 月 22, 29 日講義録を参照して欲しい。物理で熱力学をやると、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots$$

等、何やら出てきて気になるのだろう。以下のオマケ 2 で少し説明したが、そのような記号の使い方を「飲み込める」人は物理に、気になって「飲み込めない」人はもう少し数学をやると良いだろう。

また、全微分の定義で出てくるベクトルと偏微分係数の関係について質問があった。以下を良く読んで欲しい。

定義 0.2 (全微分可能性) $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ が $x = \bar{x}$ で全微分可能とは、

(i) 関数 $f(x)$ が $x = \bar{x}$ の近くで定義されていること。

(ii) $h = (h_1, \cdots, h_n)$, $\|h\| \to 0$ のとき、あるベクトル $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ があって

$$f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - h \cdot \alpha = o(\|h\|), \quad h \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{n} h_j \alpha_j. \tag{2}$$

このベクトルを f の $\bar{x}$ における微分係数といい $\alpha = \nabla f(\bar{x})$ と書く[3]。$f(x)$ が $\bar{x}$ の近くの x で定義されるとき、f の導関数 $x \to \nabla f(x)$ が定義される。

注意：(1) $f(x)$ が x で全微分可能ならば、$f(x)$ は x で連続である。

(2) $f(x)$ の x における微分係数は一意的に定まる。

(3) 式(2) をみて、少し混乱する人がいるようである。関数 f は実数値、α と h はベクトルだが $h \cdot \alpha$ は実数値だから式で「引く」ことができる。ここで、h は $\mathbb{R}^n$ の点だがベクトルと見なしている！以下では、事実だけ述べ、或いは事実さえ述べなかった事柄であっても、諸君の質問に答える内容を列挙し、証明を与える。これらの証明は、あとの講義で言及できるかどうか定かではないが、各自理解すべく努力して欲しい。必ず、これは試験に出るのですかと言う質問があろうが、講義とかこれまでの講義録、教官の言動からみて、試験にでるかどうかも判断して欲しい。

定理 0.4 f を $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数で、$x \in U$ で全微分可能とするとき、以下が成立する：*(1)* 任意の元 $\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対し、f は x で γ-方向に微分可能であり

$$(D_\gamma f)(x) = \gamma \cdot \nabla f(x). \tag{3}$$

(2) 特に、f は各座標について x で偏微分可能で

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

が成り立つ。

(8) Landau の記号と Taylor の定理との関係が分からない？という I さんからの質問があった。

簡単に言うと、有界閉区間 I で関数 f が C^3-級とすると、

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f^{(3)}(a + \theta(x-a)) \quad \exists \theta \in (0,1).$$

となる。

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)$$

とおき、$\sup_{y \in I} |f^{(3)}(y)| = M < \infty$ とすると、

$$|g(x)| \leq M|x-a|^3$$

である。故に、

$$g(x) = 0(|x-a|^3) \quad |x-a| \to 0, \qquad g(x) = o(|x-a|^2) \quad |x-a| \to 0.$$

[3] 以下に述べる注意参照

勿論、上の２番目の式は $0<p<3$ に対して $g(x)=o(|x-a|^p) \quad |x-a|\to 0$ とも書ける。

これらをより良く理解する為には、6 月 15 日にホームページに掲載した「Taylor の定理とその応用 」に詳しく書いてあるので、もう一度読んで欲しい。

(9) 自分はコンピュータを持っていないので、講義録を見られないし打ち出せない、と訴えてきた学生がいた。授業中に何度もインターネットを見る為の方策を述べたし、そこを見よ、と強調してきたのだが、伝わらなかったようだ。その学生君にとって、コンピュータを下宿に買うことが出来ないとか、コンピュータリテラシーをとっていないとかある種の抵抗感があると、「使えなく」なってしまうようだ。かくいう私も息子にそそのかされ家族割り引きで携帯電話を購入したのだが、全く使い方がわからず、携帯できずに家に置いてある。人の精神のあり方、私の場合は説明書を読むのが面倒とか、が行動を制限するという例であろう。

%%%　　オマケ 1：便利な記法、**多重添字を用いた偏導関数の記述**　%%%

以下は少し進んだ内容だが、**物事を一般化するとき、記法を工夫することがどれほど有効であるか**の例として挙げておく。

> 「私には分からないが、誰々は分かったらしいから悔しい」と思うことが勉学意欲の足しになる場合以外は、即ち理解に苦痛が伴う場合は、気にせずにそのままそっとしておけばよい。他にも知っておいた方がよろしげなものは幾らでも有るので、差し当たり分かった気がしない一つのことに拘泥するのは適当にした方がよい。必要なことはそのうち分かるようになるから。しかし、これが分からないと自己の存在そのものに極めてまずい、という事柄には命がけでこだわるのが「ホンダ」「イブカ」流！

１変数関数の積の高階微分に関する Leibnitz の公式を考えよう。これは次のように述べられる。

$$(fg)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f^{(j)}g^{(k-j)},\quad \binom{k}{j}=\frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

この公式の証明は数学的帰納法を用いれば易しい。また、このような公式が成立するだろうことは、例えば、$k=1,2,3$ についてやってみると段々見えてくる。これは、２項係数を見い出した次の公式のときと同様である。

$$(a+b)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^jb^{k-j}.$$

この Leibnitz の公式の多変数版はどうなるのだろうか？例えば２変数関数の積の偏微分を考えよう。以下では、あらわれる高階偏微分はその偏微分の順序と無関係とする。$f_{xy}=f_{yx}$, $f_{xyx}=f_{yxx}=f_{xxy}$, etc.　g についても同様。

$$(fg)_x=f_xg+fg_x,(fg)_{xx}=f_{xx}g+2f_xg_x+fg_{xx},(fg)_{xxx}=f_{xxx}g+3f_{xx}g_x+3f_xg_{xx}+fg_{xxx},$$

$$(fg)_y=f_yg+fg_y,(fg)_{yy}=f_{yy}g+2f_yg_y+fg_{yy},(fg)_{yyy}=f_{yyy}g+3f_{yy}g_y+3f_yg_{yy}+fg_{yyy},$$

$$(fg)_{yx}=f_{yx}g+f_xg_y+f_yg_x+fg_{yx},\quad (fg)_{xy}=f_{xy}g+f_xg_y+f_yg_x+fg_{xy},$$

$$(fg)_{yyx}=f_{yyx}g+2f_{yx}g_y+f_xg_{yy}+f_{yy}g_x+2f_yg_{yx}+fg_{yyx},$$

$$(fg)_{xyx}=f_{xyx}g+2f_{yx}g_x+f_{xx}g_y+2f_xg_{xy}+f_yg_{xx}+fg_{xyx},$$

これらを１変数の場合の Leibnitz の公式のように表現する方法はあるのか？

このために、以下のようにする。$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ $(\alpha_j\in\bar{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\cup\{0\})$ なるものを多重添字という。そして、

$$\partial_x^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_j}^{\alpha_j}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n},\quad \partial_{x_j}^{\alpha_j}=\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}},\partial_{x_j}^0=1,$$

と定義する。この時、任意に与えた多重添字 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対し、

$$(fg)^{(\alpha)}=\frac{\partial^{|\alpha|}(fg)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}f^{(\beta)}g^{(\alpha-\beta)}$$

と表現できる。ここで、

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \beta \le \alpha \Longleftrightarrow \beta_j \le \alpha_j \quad \forall j,$$
$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}, \quad \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \cdots, \alpha_n - \beta_n).$$

この公式の証明は偏微分の階数 $|\alpha|$ に関する帰納法による。これを用いて

$$(fg)_{yyx} = \partial_x \partial_y^2 (fg) = \partial^{(1,2)}(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{(1,2)}{\beta} \partial^\beta f \partial^{(1,2)-\beta} g$$
$$= f g_{yyx} + f_x g_{yy} + 2 f_{xy} g_y + f_{xyy} g + 2 f_y g_{xy} + f_{yy} g_x$$

となる。ここで

$$\beta = (0,0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 1;\ \beta = (1,0) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 1;\ \beta = (1,1) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 2;$$
$$\beta = (1,2) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 1;\ \beta = (0,1) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 2;\ \beta = (0,2) \Rightarrow \binom{\alpha}{\beta} = 1$$

を用いた。

上に説明した記法を用いると、より一般に多変数関数の Taylor 展開が次のようになる：

● 1 変数の場合、ある $\theta \in (0,1)$ があって

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\bar{x})(x-\bar{x})^j + R_N, \quad R_N = \frac{1}{N!} f^{(N)}(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x-\bar{x})^N$$

だった。

● 多変数の場合は

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(\bar{x})(x-\bar{x})^\alpha + R_N$$

となる。ここで

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad (x-\bar{x})^\alpha = (x_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - \bar{x}_n)^{\alpha_n}$$

であり

$$R_N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(\bar{x} + \theta(x-\bar{x}))(x-\bar{x})^\alpha \quad \exists \theta \in (0,1).$$

%%%　　オマケ 2：微分　%%%

● 去年の講義では以下のような質問があった。物理の授業で

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = -kx, \quad \text{に対して} \quad \frac{dx}{x} = -kdt$$

といきなり変形していくのだが、これはどういうことなのか？何故、左辺の微分商の dx と dt をバラバラにして扱って良いのか？

これの答は、後学期に積分の講義で不定積分の話をし、これと微分方程式との関係を話すとき与えるつもりであるが、概略を述べておこう。

(*) より $x(t) \neq 0$ として

$$\frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = g(t)$$

と変形し、この両辺の t についての不定積分

$$\int^t \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} dt = -\int^t k dt$$

を得る。左辺は積分記号下での変数変換

$$t \to y = x(t)$$

と合成関数の微分則を用いて、

$$\int^t \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int^y \frac{1}{y} dy \Big|_{y=x(t)}$$

となるから

$$\log y \Big|_{y=x(t)} = -kt + C \Longrightarrow x(t) = e^{-kt+C}$$

となる。

● 「微分（differential）」について：f を $\mathbb{R}^n$ で定義された微分可能な任意の実数値関数とする。一点 x で f に対し

$$(df)_x(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) z_j \quad z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

と定義する。$(df)_x$ は $\mathbb{R}^n$ で定義され $\mathbb{R}$ の値を取る関数であって、任意の $z, w \in \mathbb{R}^n$, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$(df)_x(z+w) = (df)_x(z) + (df)_x(w), \quad (df)_x(cz) = c(df)_x(z)$$

を満たす、すなわち、$(df)_x$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への一次写像（線形写像）であり、f の x における**微分（differential）**という。例えば、$n = 1$ のときは $(df)_x(z) = \frac{df}{dx}(x)z$、$n = 2$ のときは

$$(df)_x(z) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) z_2.$$

%%%

陰関数定理と条件付き極値問題は、時間的に余裕がなく紹介することすらできなかった。これ以上の知識の詰め込みは知識の消化不良を引き起こし、むしろ有害となるだろう。米国風の学部教育の数学よりはずっと高級なことを短い時間でやっているわけで、与えられる知識としては既に十二分、これらをどういう形で自分の血肉にするか？

私は、最も説得力があると思われる「物の考え方の典型例」として数学的な論証や一般化、抽象化があること、これを学生諸君に気がついて欲しいのである。技術としての数学は今やコンピュータの中にいくらでもあるのだから。