「V 類 S 組　微分積分学第１期末試験問題解答例–8 月 3 日」　revised8.18

$\boxed{\mathbf{1}}$ [20 点]　$0 \leq r < 1$ とする。数列 $\{a_n\}$ について以下を示せ。
(i) ある $L \in \mathbb{N}$ があって、$n \geq L$ のとき $|a_{n+1}| \leq r|a_n|$ が成立つならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。
(ii) ある $L \in \mathbb{N}$ があって、$n \geq L$ のとき $|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$ が成立つならば数列 $\{a_n\}$ は基本列である（基本列とは任意の $\epsilon > 0$ に対してある数 M があって $m, n \geq M$ ならば $|a_m - a_n| \leq \epsilon$ となること）。

解答例：(i) $a_L = 0$ とすると、$n \geq L$ のとき $a_n = 0$ となるから $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。以降 $|a_L| \neq 0$ とする。任意に $\epsilon > 0$ をとると、ある $K \in \mathbb{N}$ が存在して、$r^K < \epsilon/|a_L|$ となる。$n \geq L + K$ とすると

$$|a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq r^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq r^{n-L}|a_L| = r^{n-L-K}r^K|a_L| \leq r^K|a_L| \leq \epsilon$$

となる。これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を意味する。
(ii) (i) と同様に考えて、$|a_L - a_{L-1}| \neq 0$ として一般性を失わない。任意に $\epsilon > 0$ をとると、$r^K < \epsilon(1-r)/|a_L - a_{L-1}|$ となる $K \in \mathbb{N}$ が存在する。$m > n \geq L + K$ とすると

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq r^{m-n-1}|a_{n+1} - a_n| + r^{m-n-2}|a_{n+1} - a_n| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \frac{1 - r^{m-n+1}}{1-r}|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{1-r}|a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \frac{1}{1-r}|a_{L+K} - a_{L+K-1}| \leq \frac{r^K}{1-r}|a_L - a_{L-1}| < \epsilon
\end{aligned}$$

である。これより $M = L + K$ として $\{a_n\}$ は基本列をなす。　□

$\boxed{\text{注意 1}}$ 『$|a_{n+1}| < |a_n|$ だから $\{|a_n|\}$ は単調減少で非負である。よって $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ となる』という「証明」があった。この主張『$\cdots$』の反例は『$a_n = 1 + n^{-1}$ とすると、これは単調減少で非負だが、その極限は 1 であって 0 ではない。』実際、0 は数列 $\{1 + n^{-1}\}$ の一つの下界であるが、この数列の下限は 1 である。この問の主旨は「$\epsilon - N$ 論法を用いて数列の極限概念を説明できるか」である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ [20 点] p を正の整数とし、関数 $f_p(x)$ を以下のように定義する。

$$f_p(x) = \begin{cases} x^p \sin(1/x) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

このとき、
(1) $f_p(x)$ は連続であることを示せ。
(2) $f_p(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で微分可能となる p の範囲を求めよ。
(3) $f_p(x)$ が $\mathbb{R}$ 上 C^1 級（即ち、微分可能で導関数が連続）となる p の範囲を求めよ。

（注意：この問題では、$\epsilon - \delta$ 論法を使えるかどうかを問うているわけではない）

解答例：(1) [5 点] $x \neq 0$ で f が連続なることは明らかとしてよい。$x \neq 0$ で

$$\left| x^p \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x|^p$$

であるから、$\lim_{x\to 0}$ とすると

$$\lim_{x\to 0} f_p(x) = \lim_{x\to 0} x^p \sin\frac{1}{x} = 0 = f_p(0).$$

これは f_p が $x = 0$ で連続なることを示す。

(2) [8 点] 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対し、$x \neq 0$ で微分可能なることは明らかであろう。一方

$$\frac{f_p(h) - f_p(0)}{h} = h^{p-1}\sin\frac{1}{h}$$

なることより、
<u>$p = 1$ の場合:</u> $\dfrac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \sin\dfrac{1}{h}$ の $h \to 0$ での極限が存在しないから、微分可能でないことが分る。
<u>$p \geq 2$ の場合:</u>

$$\left|\frac{f_p(h) - f_p(0)}{h}\right| = \left|h^{p-1}\sin\frac{1}{h}\right| \leq |h|^{p-1}$$

より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_p(h) - f_p(0)}{h} = 0$$

である。故に、$p \geq 2$ のとき $f_p(x)$ は $x = 0$ でも微分可能である。

(3) [7 点] $x \neq 0$ のとき、

$$f_p'(x) = px^{p-1}\sin\frac{1}{x} - x^{p-2}\cos\frac{1}{x} = x^{p-2}\left(px\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

であるから、$x \neq 0$ では $f_p'(x)$ は連続なることは明らか。
<u>$p = 2$ の場合:</u> (2) の $p = 1$ の場合と同様の考察で、特定の h をとれば $h \to 0$ のとき差分は収束しないことが分るので $f_2'(x)$ は $x = 0$ で連続でない。
<u>$p \geq 3$ の場合:</u>

$$|f_p'(x)| = |x|^{p-2}\left|px\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|^{p-2}(p|x| + 1)$$

だから

$$\lim_{x\to 0} f_p'(x) = \lim_{x\to 0} x^{p-2}\left(px\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{この極限を } f_p'(0) \text{ と書いた}$$

となる。即ち、$p \geq 3$ ならば f_p' は $x = 0$ で連続だから $f \in C^1$ となる。 □

$\boxed{\text{注意 2}}$ 関数にとって <u>幾分妙な、或いは例外的な点としての原点</u> での導関数はどうなっているか？が問われている。かなりの人が、この問題に関し「何を問われているのか」認識できなかったようである。

> 関数というのは実験の観測値とも見なせる。そこで、ある点 A 直下では観測不可能だが、A 点の幾ら近くでも観測できるとき、A 点での関数の振る舞いを考えねばならない状況を想定してみよう。それにもかかわらず、実験を始める前の理論的要請から、A 点での値を「0 と見なす」としている。知りたいのはその観測不能点での導関数の値が近辺での値とどう関係しているのかということで、それを数学的に記述すると、この問題のような設定になるのではなかろうか。観測不能点での（理論上はそこでも存在している）関数のその点での性質を調べているのである。

注意：連続性に関して

$$\lim_{x\to+0} x^p\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0} x^{p-1}\frac{\sin 1/x}{1/x} = 0\cdot 1 = 0$$

となるからという説がかなり見受けられた。もしこれが正しいと、$p > 1$ でないと連続性は保証されない事になる（実際は、$|\sin(1/x)| \leq 1$ を用いれば $p > 0$ で連続性は保証されているのだが)。

ところで我々が分かっているのは

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1 \quad \text{だが} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z} = 0$$

ということである。

$\boxed{\mathbf{3}}$ [15 点] 次の関数の原点 $(0,0)$ における偏微分可能性及び全微分可能性を調べよ。

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

解答例：前問と同様の考察をする。$h\neq 0, k\neq 0$ として

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$

だから、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0, \quad \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

即ち、原点での偏微分係数が存在して、$f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$ となる。

一方、$d(\arcsin z)/dz=1/\sqrt{1-z^2}$ であり $\phi(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ とおくと、$(x,y)\neq(0,0)$ で

$$f_x(x,y)=y\arcsin\phi(x,y)+xy\left(\frac{1}{\sqrt{1-\phi(x,y)^2}}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}=y\arcsin\phi(x,y)+\frac{2y|xy|}{x^2+y^2}\to 0 \quad (x,y)\to 0$$

となる。同様に $\lim_{(x,y)\to 0}f_y(x,y)=0$ となる。これらから、任意の (a,b) で $f_x(a,b),\ f_y(a,b)$ が存在し、$\lim_{(a,b)\to 0}f_x(a,b)=f_x(0,0), \lim_{(a,b)\to 0}f_y(a,b)=f_y(0,0)$ となっているから、f は C^1-級となる。更に、極座標を使うと $h=\rho\cos\theta,\ k=\rho\sin\theta,\ \rho=\sqrt{h^2+k^2}$ とすると

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\rho}=\frac{hk}{\rho}\arcsin\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}=\rho\cos\theta\sin\theta\arcsin\cos 2\theta\to 0 \quad (\rho\to 0)$$

となる。これは

$$|f(h,k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)|=o(\sqrt{h^2+k^2})$$

を意味するから、f は $(0,0)$ で全微分可能である。

$\boxed{\text{注意 3}}$ 前問に引き続き、この問題でも、多くの人が「何をしたら何を証明したことになるのか」が分らなかったようである。「高校時代よりただ幾分難しめの計算をして答えを出す」[1]のが大学の数学教育の目的ではない[2]。今後諸君にとって一番難しいのは、多くの人が道を失っている時、どの方向が進むべき道かを考えることであろう。その人々の基礎体力を養成する機関が大学であるべきであろうし、その一助として数学講義を捉えて欲しいものである。物事を整理するには何を指標としたら良いかを考えるのが「定義する」という操作、そして「元に戻って考える」ということが「定義から、論理的にゆるぎのない推論で、結論を導く」という形であり、それを「証明する」という。

将来のリーダーたる事を期待されている諸君のことだから、例えば、企業家の立場で考えるというシミュレーションも必要となろう。企業家の立場では「企業を存続させるためには利益を挙げなければならない」ことはほぼ自明なことだろうが、そのためには「何をどうしたらよいのか」が大切だろう。勿論、数学でそのようなマインドを学ぼうとは思わないと言いたそうな諸君がひしめいている。その意気もまた良し。しかしこの試験の点数はつかない。

[1]これは高等専門学校の訓練、もっともそれすらままならなくなりつつある？

[2]個人用の「パン焼き器」を新しく考えた人は素晴らしいが、その製品を安く大量に性能を上げてという発想は大切だがそれだけでは「発想」に乏しい。このような考え方ばかりでは「真似しかできないのか」「創造性がないのか」と言われかねない。とはいえ、日本風のこの「猛々しくは見えない箱庭的だが激烈な価格競争」が家庭電化製品の廉価、高性能化を達成したのは事実

$\boxed{\mathbf{4}}$ [15 点]$z = a_1x_1 + a_2x_2$ とし、ϕ_1, ϕ_2 を z の関数として 2 階微分可能とし、$f(x_1, x_2) = x_1\phi_1(z) + x_2\phi_2(z)$ とおく。この時、$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ ならば、以下が成立することを示せ：

$$(i)\ b_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = b_1\phi_1(z) + b_2\phi_2(z), \quad (ii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1},$$
$$(iii)\ b_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2b_1b_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + b_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0.$$

解答例：(i) 合成関数の微分則から

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \phi_1(z) + x_1\phi_1'(z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\phi_2'(z)\frac{\partial z}{\partial x_1} = \phi_1(z) + a_1x_1\phi_1'(z) + a_1x_2\phi_2'(z),$$

かつ

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \phi_2(z) + x_1\phi_1'(z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_2\phi_2'(z)\frac{\partial z}{\partial x_2} = \phi_2(z) + a_2x_1\phi_1'(z) + a_2x_2\phi_2'(z),$$

となる。故に、

$$b_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = b_1\phi_1(z) + b_2\phi_2(z) + (b_1a_1 + b_2a_2)(x_1\phi_1'(z) + x_2\phi_2'(z))$$

であり、$b_1a_1 + b_2a_2 = 0$ より結論が従う。
(ii) ϕ_* は 2 階微分可能だから、

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_2\phi_1'(z) + a_1a_2(x_1\phi_1''(z) + x_2\phi_2''(z)) + a_1\phi_2'(z),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_1\phi_2'(z) + a_1a_2(x_2\phi_2''(z) + x_1\phi_1''(z)) + a_2\phi_1'(z).$$

これより、$f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$.
(iii) (i) より

$$\sum_{j=1}^{2} b_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{2} b_j\phi_j(z) = \sum_{j=1}^{2} b_j\phi_j'(z)\frac{\partial z}{\partial x_k} = a_k\sum_{j=1}^{2} b_j\phi_j'(z).$$

故に、

$$b_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2b_1b_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + b_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_kb_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k} = \sum_{k=1}^{2} a_kb_k\sum_{j=1}^{2} b_j\phi_j'(z) = 0. \qquad \square$$

評：ほとんどの人にはボーナス問題としての機能を果たした。

$\boxed{\mathbf{5}}$ [20 点] 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ の極値を求めよ。

解答例：$f_x = f_y = 0$ を計算すると

$$4x^3 - 2x + y = 0, \quad 4y^3 - 2y + x = 0$$

となる。A, B を実数として $A = 0,\ B = 0 \Longleftrightarrow A + B = 0,\ A - B = 0$ を用いて

$$4(x^3 + y^3) - (x + y) = 0, \quad 4(x^3 - y^3) - 3(x - y) = 0$$

となる。これから

$$(x + y)[4(x^2 - xy + y^2) - 1] = 0, \quad (x - y)[4(x^2 + xy + y^2) - 3] = 0$$

であり、A,B,C,D を実数として

$$AB=0,\ CD=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A=0 \text{ かつ } (C=0 \text{ 或いは } D=0), \\ \text{或いは} \\ B=0 \text{ かつ } (C=0 \text{ 或いは } D=0), \end{cases}$$

より、

$$(i)\ x-y=0 \text{ かつ } [4(x^2-xy+y^2)-1=0 \text{ 或いは } x+y=0],$$

$$(ii)\ 4(x^2+xy+y^2)-3=0 \text{ かつ } [x+y=0 \text{ 或いは } 4(x^2-xy+y^2)-1=0]$$

となる。(i) より

$$(x=y \text{ かつ } 4x^2=1) \text{ 或いは } (x=y \text{ かつ } x=-y) \Longrightarrow (0,0),(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}).$$

(ii) より

$$4(x^2+xy+y^2)-3=0 \text{ かつ } x=-y \Longrightarrow (\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (\text{複号同順}),$$

或いは

$$4(x^2+xy+y^2)-3=0 \text{ かつ } 4(x^2-xy+y^2)-1=0 \text{ より } x+y=\pm 1 \text{ かつ } xy=\frac{1}{4} \Longrightarrow x=y=\pm\frac{1}{2}.$$

これらより、$f_x=f_y=0$ なる点は

$$(0,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ (\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),\ (-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

となる。一方

$$f_{xx}=12x^2-2,\ f_{xy}=1,\ f_{yy}=12y^2-2$$

だから

$$J_f=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4(6x^2-1)(6y^2-1)-1,$$

で

$$f_x(0,0)=-2<0,\ J_f(0,0)=3>0,\quad f_{xx}(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})=1>0,\ J_f(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})=0,$$

$$f_{xx}(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2})=7>0,\ J_f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2})>0,\quad f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{9}{8}$$

となる。故に、f は $(0,0)$ で極大値0, $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2})$ で極小値 $-\frac{9}{8}$ をもつ。更に、$(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ はここまでの計算だけでは極値点かどうか判断できない。

注意 4 この試験の解答例の最初の version では、『$(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ は極値点ではない』という記述をしたのだが『何故「極値点ではない」といえるのか』、という質問がメールであった。極めて良い質問である。実際は、最後まで計算してみると極値であり、『$(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ は極値点ではない』は間違いであることが示される。このメールの質問者にはボーナス点を与える。これを以下に詳しく説明する。

定理 0.1 偏導関数が連続な関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値になるとき

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

が成立する。さらに、(a,b) で f の2階偏導関数が連続のとき

$$J_f(x,y)=J(x,y)=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

として

$$\begin{cases} J(a,b) > 0 \text{ のとき} \begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は } (a,b) \text{ で極小値をとる、} \\ f_{xx}(a,b) < 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は } (a,b) \text{ で極大値をとる、} \end{cases} \\ J(a,b) < 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極値にならない、} \\ J(a,b) = 0 \text{ ならば、ここで極値になるかどうか一般には判定できない。} \end{cases} \qquad \square$$

注意：1変数関数の場合、f は 2 階連続微分可能とし $f'(a) = 0$ とする。

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は } (a,b) \text{ で極小値をとる、} \\ f''(a) < 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は } (a,b) \text{ で極大値をとる、} \\ f''(a) = 0 \text{ ならば} \quad \text{ここで極値になるかどうか一般には判定できない。} \end{cases}$$

しかし、f は何回も連続微分可能とするとき、Taylor 展開を用いれば容易に、

$$\begin{cases} f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, 2n-1) \text{ かつ } f^{(2n)}(a) > 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極小値をとる、} \\ f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, 2n-1) \text{ かつ } f^{(2n)}(a) < 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極大値をとる、} \\ f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, 2n) \text{ かつ } f^{(2n+1)}(a) \neq 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極値になるかどうか} \\ \hfill \text{一般には判定できない、} \end{cases}$$

ことが分る。このような判定条件を 2変数（以上の）一般の関数に対して どこまで見通し良い形で作ることができるのか？これは煩雑になるだろうし、実は私も書いたものを知らない。

$\boxed{\text{注意 5}}$ 上の注意より『$(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ は極値点ではない』という言い方は『ここまでの情報では極値点とは判定できない』とすべきであったことが分る。上の判定条件は Hesse 行列 J_f の固有値がすべて正（極小）か、すべて負（極大）か、正負取り混ぜてあるが 0 はないか、固有値に 0 を含む（まだ判定できない）か、の場合に分けることに相当する。この問題の場合は、極値の候補点 $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ での Hesse 行列 J_f の固有値が 0 を含むのである。ところで、この問題の関数は「多項式」で、前にオマケで説明した多重添字 を用いると

$$f(A+H) = \sum_{|\alpha|=0}^{4} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!}(A) H^\alpha \quad A = (a,b),\ H = (h,k)$$

となる。より具体的に、

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) =& f(a,b) + [h f_x + k f_y] + \left[\frac{f_{xx}}{2!} h^2 + \frac{f_{xy}}{1!1!} hk + \frac{f_{yy}}{2!} k^2 \right] \\ & + \left[\frac{f_{xxx}}{3!} h^3 + \frac{f_{xxy}}{2!1!} h^2 k + \frac{f_{xyy}}{1!2!} h^2 k + \frac{f_{yyy}}{3!} k^2 \right] \\ & + \left[\frac{f_{xxxx}}{4!} h^4 + \frac{f_{xxxy}}{3!1!} h^3 k + \frac{f_{xxyy}}{2!2!} h^2 k^2 + \frac{f_{xyyy}}{1!3!} h k^3 + \frac{f_{yyyy}}{4!} k^4 \right] \\ =& f(a,b) + g(a,b;h,k) \end{aligned}$$

となる[3]。ここで $f_x = f_x(a,b)$, etc, と省略している。

$$g(0,0;h,k) = -h^2 + hk - k^2 + (h^4 + k^4) \leq 0 \ (\sqrt{h^2+k^2} \text{ が十分小}),$$

$$g(\pm\sqrt{3}/2, \mp\sqrt{3}/2; h, k) = 7h^2 + 2hk + 7k^2 + (h^4 + k^4) \geq 0 \ (\sqrt{h^2+k^2} \text{ が十分小}),$$

$$g(\pm 1/2, \pm 1/2; h, k) = \frac{(h+k)^2}{2} \pm (h^3 + k^3) + (h^4 + k^4) \begin{cases} \geq 0 \ (h \neq -k \text{ で } \sqrt{h^2+k^2} \text{ が十分小}), \\ \geq 0 \ (h = -k \text{ でも } h^3 + k^3 = 0 \text{ だから}). \end{cases}$$

これより極値点の定義から、f は $(0,0)$ で極大、$(\pm\sqrt{3}/2, \mp\sqrt{3}/2)$ で極小、また、$(\pm 1/2, \pm 1/2)$ でも極小である。

[3] $x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ はどんな変数に関しても 5 回以上微分すれば 0 となることを用いている

ここで、上の定理の『$J(a,b)<0$ ならば f は (a,b) で極値にならない』の証明[4]をしておこう。

$$\alpha = f_{xx}(a,b),\ \beta = f_{yy}(a,b),\ \gamma = f_{xy}(a,b)$$

とおき、$\gamma^2-\alpha\beta>0$ とする。$k\neq 0$ とし $h/k=m$ を一定にして $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ とすると、$\alpha>0$ ならば

$$k^2(\alpha m^2+2\gamma m+\beta)\begin{cases} >0 & (m<\frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2-\alpha\beta}}{\alpha} \text{ or } m>\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\alpha\beta}}{\alpha}), \\ =0 & (m=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\alpha\beta}}{\alpha}), \\ <0 & (\frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2-\alpha\beta}}{\alpha}<m<\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-\alpha\beta}}{\alpha}). \end{cases}$$

$\alpha<0$ のときも同様の考察ができる。また $\alpha=0$ のときは一次式だから正負の値を取る。故に、

$$f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2$$

は正負の値を取るので、f は (a,b) で 極値とはなり得ない。

＝＝＝＝成績＝＝＝＝

期末試験受験者 113 名、合格者 104 名（92 %合格、うち感想文による授業貢献を認められた者５名）不合格者９名であった。90 点以上合格者 16 名のうち 95 点以上の諸君は

秋本洋平、市瀬茂徳、今西大輔、太田茂樹、内藤卓人、渡邊伸平、ファムハーゴク（敬称略）

であり、健闘を讃えたい。80 点以上 90 点未満の合格者 18 名。

受講申告者 122 名中、不合格者 18 名（これでも 85 %合格）：試験をすべて受けなかった者 1 名、期末試験を受けなかった者 8 名、全て受けたが 60 点未満の者 9 名。

[4]勿論、多項式だけでなく、一般の 2 変数関数に対して成立する