解析概論 II　付録：パラメタ付き積分のパラメタ依存性（2006 年 02 月）井上淳

1　パラメータ付き多次元 Riemann 積分

1.1　一様収束と項別微分、項別積分

定義 1.1.1 集合 A 上の $\mathbb{R}^m$ 値有界関数全体の集合を $B(A:\mathbb{R}^m)$ と記す。各 $f \in B(A:\mathbb{R}^m)$ に対し $\|f\| = \sup_{x\in A}|f(x)|$ を f の一様ノルムという。A 上の関数列 $\{f_n\}$ が f に A 上一様収束するとは $\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\| = 0$ なることと定義する。

注意：$B(A:\mathbb{R}^m)$ はベクトル空間をなし、$\|\cdot\|$ はノルムの性質を持つ。

注意：T を $\mathbb{R}^k$ の部分集合とし、連続的径数 $t \in T$ をもつ $A \subset \mathbb{R}^m$ 上の関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ についても、一様収束なる概念を考えることができ、

定義 1.1.2 $b \in \bar{T}$ に対し $\lim_{t\to b}\|f - f_t\| = 0$ なるとき、関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t \to b$ のとき f に A 上一様収束するという。

例：$I = [0,1]$ 上の関数 $f_t(x) = e^{-tx}\sin x$ $(t > 0)$ からなる関数族 $\{f_t\}_{t>0}$ は $t \to +0$ のとき、I 上 $f(x) = \sin x$ に一様収束する。

定理 1.1.1 (項別微分定理) 1 次元有界閉区間 $I = [a,b]$ 上の関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ が以下を満たす：
(a) $\{f_t\}_{t\in T}$ は $t \to b$ のとき f に I 上各点収束する。
(b) 各 f_t $(t \in T)$ は I 上 C^1 級とする。
(c) $\{f'_t\}_{t\in T}$ は $t \to b$ のときある関数 g に I 上一様収束する。

このとき、f は I 上 C^1 級で

$$f'(x) = g(x)\ (\forall x \in I).$$

証明：f'_t は連続だから I 上で R 可積分で微分積分の基本定理 (1) より

$$\int_a^x f'_t = f_t(x) - f_t(a)$$

となる。一様収束しているから g は I 上で連続で、R 可積分であり

$$\left|\int_a^x g(u)du - \int_a^x f'_t(u)du\right| \leq \|g - f'_t\|\,|x-a| \leq \|g - f'_t\|\,|b-a|$$

が成立する。仮定 (c) より右辺は $t \to b$ のとき 0 に収束するから、上式の左辺は $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(u)du$ に I 上一様収束する。$f_t - f_t(a)$ も I 上一様収束するから、その極限は $f - f(a)$ であり、

$$G(x) = \int_a^x g(u)du = f(x) - f(a) \quad (\forall x \in I)$$

が成立する。微分積分の基本定理 (2) より上式左辺は微分可能であり $f'(x) = g(x)$ $(\forall x \in I)$ が成立する。　□

命題 1.1.1 $f : A \times T \to \mathbb{R}^m$ が以下を満たすとする：
(i) $x \in A$ について A 上一様に $\lim_{t\to b} f(x,t) = f(x)$ となる。
(ii) $t \in T$ について各点収束の意味で $\lim_{x\to a} f(x,t) = g(t)$ が成り立つ。
(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}^m$ が存在する。このとき

$$\lim_{x\to a}\lim_{t\to b} f(x,t) = \lim_{t\to b}\lim_{x\to a} f(x,t) = \lim_{(x,t)\to(a,b)} f(x,t).$$

問：この命題を証明せよ。

定義 1.1.3 A 上の関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ は、A に含まれる任意のコンパクト集合 K 上で、$t \to b$ のとき f に一様収束するとき、A 上でコンパクト一様収束とか、A 上広義一様収束するという。

例： $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ は $I = (-1, 1]$ 上広義一様収束するが、$I = (-1, 1]$ 全体では一様収束しない。

$\because$) 任意の $x \in [0, 1]$ に対し

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

を 0 から x まで積分して

$$\log(1+x) = s_n(x) + R_n(x), \quad s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt$$

となる。これより任意の $x \in [0, 1]$ に対し

$$\left|R_n(x)\right| \le \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \le \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

だから、$\|R_n\| \to 0$ $(n \to \infty$、即ち、$\|\log(1+x) - s_n(x)\| \to 0$ $(n \to \infty$ が示され、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ は $I = [0, 1]$ 上一様収束する。

次に、$-1 < -a \le 0$ となる任意の a に対し $I_a = [-a, 0]$ で一様収束することを示す。$x \in I_a$ のとき $x = -y$、$t = -s$ と変数変換すれば

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| = \int_0^y \frac{s^n ds}{1-s} \le \frac{1}{1-a}\int_0^y s^n ds \le \frac{1}{(1-a)(n+1)}$$

となる。故に I_a 上で $\|R_n\|_{I_a} \to 0$ $(n \to \infty)$ となるから、級数は I_a 上で一様収束する。しかし、a が 1 に近づくと $\|R_n\|_{I_a}$ は無限大になる！ $\square$

問：任意の整級数はその収束円板内で広義一様収束することを示せ。

定理 1.1.2 (項別積分定理) Ω を $\mathbb{R}^m$ 内の有界な面積確定集合とする。Ω 上の *Riemann* 可積分関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ が $t \to b$ のとき Ω 上の R 可積分関数 f に Ω 上 <u>一様収束すれば</u>

$$\lim_{t\to b}\int_\Omega f_t(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

が成立する。

証明：積分の線形性と絶対値を取る操作による単調性より

$$\left|\int_\Omega f - \int_\Omega f_t\right| \le \int_\Omega \left|f - f_t\right| \le |\Omega| \|f - f_t\| \to 0\ (t \to b). \qquad \square$$

注意:(1) 関数列 $\{f_n\}$, $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2)$ は $[0,1]$ 上で一様収束しないが $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$. 即ち、一様収束ではないが各点収束し、それにもかかわらず項別積分できる例がある[1]。

(2) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2 x}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2(n-1)}}{(2n)!n}x^{2n}$ $(|x| < \infty)$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a+nb}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

上に述べた項別積分定理の、より洗練された版も挙げておこう。

定理 1.1.3 Ω を $\mathbb{R}^m$ 内の面積確定集合とする。Ω 上の R 可積分関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ が次の条件を満たすとする：

(i) $t \to b$ のとき Ω 上の R 可積分関数 f に Ω 上で各点収束する。

(ii) Ω 上可積分な関数 $M(x) \geq 0$ が存在し、任意の $\epsilon > 0$ に対し b の近傍 U があって、$t \in U$ ならば任意の $x \in \Omega$ に対して $|f(x) - f_t(x)| \leq \epsilon M(x)$ となる。

このとき

$$\lim_{t\to b}\int_\Omega f_t(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

が成立する。

証明：$t \in U$ ならば

$$\left|\int_\Omega f - \int_\Omega f_t\right| \leq \int_\Omega |(f - f_t)| \leq \epsilon\int_\Omega M = M\epsilon. \qquad \square$$

1.2 パラメータ付き積分

定理 1.2.1 Ω を $\mathbb{R}^n$ の体積確定な有界閉集合、I を任意の 1 次元区間、$K = \Omega\times I$ とおく。$f(x,t)$ $(x \in \Omega,\ t \in I)$ が K 上連続ならば
(1) $F(t) = \int_\Omega f(x,t)dx$ は I 上連続であり、
(2) 更に $\partial f/\partial t$ が K 上で連続ならば、F は I 上 C^1 級で

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

が成立する。

証明：J を I に含まれる任意の有界閉区間として (1)、(2) を示せば良い。そこで、定理における J と I の役割を読み替えて、$I = [a,b]$ として (1)、(2) を示す。
(1) $f(x,t) = f_t(x)$ とおく。コンパクト集合 K 上 f は連続だから一様連続、即ち、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$(x,t),(y,s) \in K$ で

$$|(x,t) - (y,s)| < \delta \Longrightarrow |f(x,t) - f(y,s)| < \epsilon$$

となる。これは言い換えると

$$|t - s| < \delta \Longrightarrow |f_t(x) - f_s(y)| < \epsilon\ (\forall x \in \Omega) \quad 即ち \quad \|f_t - f_s\| < \epsilon.$$

故に、$|t - s| < \delta$ のとき

$$|F(t) - F(s)| \leq \int_\Omega |f_t(x) - f_s(x)|dx \leq \|f_t - f_s\||\Omega| \leq \epsilon|\Omega|.$$

[1]「一様収束」は十分条件であって項別積分できる必要条件ではない

これより F は I 上で一様連続となる。
(2) $\partial f/\partial t$ が K 上一様連続ならば、(1) により

$$G(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

は I 上連続である。任意の $s \in I$ に対し

$$\begin{aligned}\int_a^s G(t)dt = \int_a^s \left[\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx\right]dt &\overset{(i)}{=} \int_\Omega \left[\int_a^s \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt\right]dx \\ &\overset{(ii)}{=} \int_\Omega (f(x,s) - f(x,a))dx = F(x) - F(a)\end{aligned}$$

ここで (i) は Fubini の定理、(ii) は微積分の基本定理による。この式より、再度微積分の基本定理により、$F'(s) = G(s)$ $(s \in I)$ となる。これより G は連続だから $F \in C^1(I)$ となる。 $\square$

例：$a > 0, b > 0$ として積分値

$$I_a = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}, \quad I_b = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}$$

は以下の積分を a と b に関して偏微分して得られる。

$$J(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}.$$

定義 1.2.1 $D = [a,b)$ を $\mathbb{R}$ の区間、I を集合とし $D \times I$ 上の関数 $f(x,t)$ が、任意の $u \in D$ に対し、x について $[a,u]$ で R 可積分とし

$$F_u(t) = \int_a^u f(x,t)dx$$

とおく。I 上の関数族 $\{F_u\}_{u \in D}$ が $u \to b$ $(u < b)$ のとき

$$F(t) = \lim_{u \to b-0} \int_a^u f(x,t)dx \left(= \int_a^{b-0} f(x,t)dx \quad \text{とも書く} \right) \tag{1}$$

に I 上一様収束するとき、広義積分(1) は t に関し I 上一様収束するという。$I \subset \mathbb{R}^n$ で I に含まれるコンパクト集合 K 上で一様収束するとき、(1) は I 上一様収束するという。

定理 1.2.2 $J = [a,b)$ とし、I を一つの集合とする。関数 $f(x,t) : J \times I \to \mathbb{R}$ に対し J 上の関数 $M(x)$ があって
(i) $|f(x,t)| \le M(x)$ $(\forall x \in J,\ \forall t \in I)$,
(ii) $\exists \displaystyle\int_a^b M(x)dx = \lim_{u \to b} \int_a^u M(x)dx$,
とする。このとき広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x,t)dx = F(t)$ は I 上一様収束する

証明：(ii) より $M_u = \displaystyle\int_a^u M(x)dx \to M_b = \int_a^{b-0} M(x)dx$ だから、関数の極限に関する Cauchy 条件より以下が成り立つ：任意の $\epsilon > 0$ に対して $c \in [a,b)$ があって、$c < u \le v < b$ なる任意の u, v に対し

$$\left|M_v - M_u\right| < \epsilon$$

となる。故に、$c < u \le v < b$ と任意の $t \in I$ に対し (i) により

$$\left|F_v(t) - F_u(t)\right| = \left|\int_a^v f(x,t)dx - \int_a^u f(x,t)dx\right| \le \int_v^u |f(x,t)|dx \le \int_v^u M(x)dx = M_v - M_u$$

即ち

$$\|F_v - F_u\| \leq \left|M_v - M_u\right| < \epsilon$$

が成り立つ。これより、関数族 $\{F_u\}_{U\in J}$ は I 上で一様 Cauchy 条件を満たすから I 上で一様収束する。 □

定理 1.2.3 $J=[c,d)$ とし、I は $\mathbb{R}$ の区間とする。連続関数 $f: J\times I\to\mathbb{R}$ に対し広義積分

$$F(t)=\int_c^{d-0} f(x,t)dx$$

が I 上一様収束するとき、以下が成立する：
(1) F は I 上連続である。
(2) I に含まれる任意の有界閉区間 $[a,b]$ で

$$\int_a^b F(t)dt=\int_c^{d-0}\left[\int_a^b f(x,t)dt\right]dx.$$

証明：(1) 任意の $u\in[c,d)$ をとり

$$F_u(t)=\int_c^u f(x,t)dx$$

とおく。関数 F_u は I 上連続で、連続関数族 $\{F_u\}_{u\in J}$ が I 上 F に広義一様収束するから、F は I 上連続である。

(2) Fubini の定理より

$$\int_a^b F_u(t)dt=\int_c^u\left[\int_a^b f(x,t)dt\right]dx.$$

$\{F_u\}_{u\in J}$ は $[a,b]$ 上で F に一様収束するから、項別積分定理より $u\to d-0$ のとき上式左辺は $\displaystyle\int_a^b F(t)dt$ に収束する。 □

定理 1.2.4 $J=[c,d)$、I は $\mathbb{R}$ の区間とし、連続関数 $f: J\times I\to\mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすとする：
(a) 任意の $t\in I$ に対し広義積分 $F(t)=\displaystyle\int_c^{d-0} f(x,t)dx$ が存在する。
(b) $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ が $J\times I$ 上で存在し連続。
(c) $G(t)=\displaystyle\int_c^{d-0}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$ は I 上広義一様収束する。

このとき F は I 上 C^1 級であり、

$$F'(t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_c^{d-0} f(x,t)dx=\int_c^{d-0}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx=G(t). \tag{2}$$

証明：(b), (c) と定理 1.2.3(1) より、$G(t)$ は I 上で連続である。I の任意の有界閉区間 $[a,s]$ をとると、定理 1.2.3(2) と微積分の基本定理 I より

$$\int_a^s G(t)dt=\int_c^{d-0}\left[\int_a^s\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right]dx=\int_c^{d-0}[f(x,s)-f(x,a)]dx=F(s)-F(a)$$

となる。微積分の基本定理 II より F は微分可能で(2) が成立する。 □

1.2.1 B 関数の性質–パラメタ付き積分の例として

任意の $x>0, y>0$ をパラメタとして積分

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,\quad B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

を Gamma 関数、Beta 関数と命名しその性質を前に少し述べた。

定理 1.2.5 任意の $x>0, y>0$、$n\in\mathbb{N}$ に対して以下が成立する：

(1) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$,

(2) $\Gamma(1)=1$,

(3) $\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots x\Gamma(x)$,

(4) $\Gamma(n+1)=n!$,

(5) $\Gamma(x)>0$,

(6) $2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2x-1}dr=\Gamma(x)$,

(7) $B(x,y)=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta=B(y,x)$,

(8) $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=\frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma((n+2)/2)}$,

(10) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma((2n+1)/2)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ (n\in\mathbb{N})$,

証明：丁度良い演習問題である、各自計算されることを期待する。

定理 1.2.6 *(1)* $\Gamma(x)$ は $x>0$ で連続のみならず C^∞ 級であり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}(\log\ t)^n dt. \tag{3}$$

(2) $\log\Gamma(x)$ は $x>0$ で凸関数である。

注意：凸関数の定義とか、そうなるための十分条件を思い出しておいて欲しい。

証明：(1) 任意の $\alpha>0$ に対し $\log t=-x$ とおくと

$$\lim_{t\to+0}t^\alpha\log t=\lim_{x\to+\infty}(-x)e^{-\alpha x}=0$$

となる。これより $\log t=O(t^{-\alpha})\ (t\to+0)$ であるから、$f_n(x,t)=e^{-t}t^{x-1}(\log\ t)^n$ とおくと $f_n(x,t)=O(t^{x-n\alpha-1})\ (t\to+0)$ である。だから、$\forall x>0$ に対し $0<\alpha<x/n$ なるように α をとれば $f_n(x,t)=O(t^\lambda)\ (\lambda>-1)$ となる。これより $\displaystyle\int_0^1 f_n(x,t)dt$ は絶対収束する。また、$x_0>0$ を固定すれば $x_0\le x, 0<t\le 1$ で $|f_n(x,t)|\le|f_n(x_0,t)|$ だから $x_0\le x$ で上の積分は一様収束する。

一方、$\log t/t\to 0\ (t\to+\infty)$ より $\log t=0(t)\ (t\to+\infty)$ である。また、任意の m に対して $e^{-t}=O(t^{-m})$ だから、$f_n(x,t)=O(t^{x+n-1-m})\ (t\to+\infty)$ となる。m を十分大きくとって $x+n-1-m<-1$ とすれば $\displaystyle\int_1^{+\infty}f_n(x,t)dt$ が収束することが示せる。任意に $x_1>0$ を固定したとき、$x\le x_1, 1\le t$ のとき $|f_n(x,t)|\le|f_n(x_1,t)|$ だから、この積分は $x\le x_1$ で一様収束する。これらより、広義積分(3) が $(0,+\infty)$ 上広義一様収束することが示された。定理 1.2.4 より $\Gamma(x)$ は $x>0$ で何回でも微分可能で n 回導関数は(3) で与えられることは数学的帰納法で示される。特に $\Gamma(x)$ は $x>0$ で連続である。

(2) 任意の $u\in\mathbb{R}$ に対し式(3) を用いて

$$\Gamma(x)u^2+2\Gamma'(x)u+\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}(u^2+2u\log t+(\log t)^2)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}(u+\log t)^2dt\ge 0$$

となる。これは u に関する 2 次方程式の判別式 D が

$$D/4 = \Gamma'(x)^2 - \Gamma(x)\Gamma''(x) \leq 0$$

となることを意味する。これを用い

$$(\log \Gamma(x))'' = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} \geq 0$$

となる。故に、$\log \Gamma(x)$ は凸関数となる。 $\square$

定理 1.2.7 (Gamma 関数の特徴付け) 関数 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が任意の $x > 0$ に対して

$$(i)\ f(x+1) = xf(x), \quad (ii)\ f(x) > 0 \text{ であり } \log f(x) \text{ は凸関数}, \quad (iii)\ f(1) = 1$$

であるとする。このとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x) \quad \textit{(Euler の公式)}$$

が成立する。

証明：(i) $n \geq 1$ なる自然数に対し

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x)$$

となるから、$x = 1$ と、(iii) から $f(n+1) = n!$ が従う。(ii) より $g(x) = \log f(x)$ は凸関数なのだから $0 < a < t < b$ に対し

$$\frac{g(t)-g(a)}{t-a} \leq \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq \frac{g(b)-g(t)}{b-t}$$

が成立する。この関係式を $0 < x \leq 1$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ に対して適用して

$$\begin{aligned}\log(n-1) = \log f(n) - \log f(n-1) &\leq \frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x} \quad ((a,t,b) = (n-1, n, n+x)) \\ &\leq \log f(n+1) - \log f(n) = \log n \quad ((a,t,b) = (n, n+x, n+1))\end{aligned}$$

この式に x を掛け、それを指数関数の肩に乗せ $f(n)$ を掛けて

$$(n-1)^x f(n) \leq f(n+x) \leq n^x f(n) \quad (0 < x \leq 1)$$

となるから、これを $(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x$ で割って

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)^x f(n)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x} &\leq \frac{f(n+x)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x} = f(x) \\ &\leq \frac{n^x f(n)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}\end{aligned}$$

が得られる。この式で n は任意だったから、$n-1$ を n に置き換え、$f(n+1) = n!$ を用いて

$$a_n(x) = \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n}$$

となる。これより

$$0 \leq f(x) - a_n(x) \leq a_n(x)\left(\frac{x+n}{n} - 1\right) \leq f(x)\frac{x}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即ち、f の表示式が従う。上では $0 < x \leq 1$ の場合であったが、この表示式は $x > 0$ で成立することを示す。実際、$x = y + m,\ 0 < y \leq 1 m \in \mathbb{N}$ とおくとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^y n!}{(y+n)(y+n-1)\cdots(y+1)y} \frac{n^m (y+m-1)\cdots(y+1)y}{(y+n+m)\cdots(y+n+1)} \\ &= (y+m-1)\cdots(y+1)y f(y) = f(y+m) = f(x)\end{aligned}$$

となるからである。ここで $\lim_{n\to\infty} n^m/[(y+n+m)\cdots(y+n+1)] = 1$ なることを用いた。

ところで $\Gamma(x)$ も定理の条件 (i), (ii), (iii) を満たすから、表示式が成立するが、この表示式における極限は唯一つだから $f(x) = \Gamma(x)$ となる。　□

ところで

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \log\, m \right)$$

が収束することは以下のように示される：

$$0 < u_n = \frac{1}{n} - \log\, \frac{n+1}{n} = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} dt \leq= \int_0^1 \frac{dt}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ となる。これと

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \log\, m \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} u_n + \log\, \frac{m+1}{m} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

から γ（=Euler 数）が存在する。Gamma 関数については、この Euler 数を用いて次の無限積表示がある。これは $z \in \mathbb{C}$ に対して成立して

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right] \quad (Weierstrass' s formula)$$

更に、

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

1.2.2 The Laplace Method

定理 1.2.8 U を $\mathbb{R}^d$ の原点の開近傍とし、ある $c > 0$ に対し $\bar{B}_c \subset U$ なるものとする。但し、$\bar{B}_c$ は開球 $B_c = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < c\}$ の閉包とする。$\varphi(x), a(x) \in C^\infty(\bar{U})$ は、ある定数 b_1, b_2 があって、$\|\varphi\|_{C^0(U)} \leq b_1$ 及び $\|a\|_{C^0(U)} \leq b_2$ を満たすとする。ここで $\mathrm{Hess}\, \varphi(0) = \mathrm{Hess}\, \Re\varphi(0)$ は正定値行列で、更にある $p > 0$ があって

$$\begin{aligned} p|x|^2 \leq x \cdot \mathrm{Hess}\, \varphi(0) x \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d), \\ \Re(\varphi(x) - \varphi(0)) \geq p|x|^2/4 \quad (\forall x \in U). \end{aligned} \tag{4}$$

とする。このとき

$$\int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x) dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{d/2} \frac{e^{-\lambda\varphi(0)}}{(\det \mathrm{Hess}\, \varphi(0))^{1/2}} \big(a(0) + O(\lambda^{-1}) \big) \quad (\lambda \to \infty) \tag{5}$$

が従う。ここで、$O(\lambda^{-1})$ は、c, b_1, b_2, p と d にのみよる定数 C があって、任意の $\lambda > 1$ に対して $|O(\lambda^{-1})| \leq C\lambda^{-1}$ なることとする。

証明：まず以下の主張を示そう：

主張 1.2.1 $H = \mathrm{Hess}\,\varphi(0)$ とおき $a \in C_0^\infty(U)$ に対し

$$\begin{aligned}&\int_U e^{-\lambda x\cdot Hx/2} a(x)dx \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2} (\det H)^{-1/2}\left[a(0) + \frac{\nabla\cdot H^{-1}\nabla}{2\lambda}a(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\cdot H^{-1}\nabla}{2\lambda}\right)^2 a(0) + O(\lambda^{-3})\right] \quad as \quad \lambda \to \infty.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、b_2, p と d にのみよる定数 C があって、任意の $\lambda > 1$ に対して $|O(\lambda^{-3})| \le C\lambda^{-3}$ とする。

主張の証明: 積分記号下の変数変換により

$$\int_U e^{-\lambda x\cdot Hx/2} a(x)dx = (\det H)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda y^2/2} a(H^{-1/2}y)dy.$$

一方、Taylor 展開を用いて

$$a(H^{-1/2}y) = \sum_{j=0}^{5} \frac{(H^{-1/2}y\cdot\nabla_x)^j a(0)}{j!} + R_6(y)$$

となる。ここで

$$R_6(y) = \sum_{|\alpha|=6} \frac{(H^{-1/2}y)^\alpha}{6!} \int_0^1 (1-t)^6 (\partial^\alpha a)(tH^{-1/2}y)dt.$$

故に、

$$\int_U e^{-\lambda x\cdot Hx/2} a(x)dx = (\det H)^{-1/2}\left(\sum_{j=0}^{5}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda y^2/2}\frac{(H^{-1/2}y\cdot\nabla_x)^j a(0)}{j!}dy + \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda y^2/2} R_6(y)dy\right). \quad \square$$

定理 1.2.8 の証明の続き: 上の積分で $j = 1, 3, 5$ に相当するものは 0 であり、$j = 0$ より (5) の第 1 項が得られる。

B_c 上で $\chi(x) = 1$ かつ $0 \le \chi(x) \le 1$ なる $\chi(x) \in C_0^\infty(U)$ をとる。

$$\int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)dx = \int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx + \int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)(1 - \chi(\lambda^{1/3}x))dx.$$

$\varphi(x) = \varphi(0) + x\cdot Hx/2 + r(x)$ を用いて

$$r(x) = \frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3} x^\alpha \int_0^1 (1-t)^2 (\partial^\alpha\varphi)(tx)dt \tag{7}$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx &= e^{-\lambda\varphi(0)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda x\cdot Hx/2} e^{-\lambda r(x)} a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx \\ &= e^{-\lambda\varphi(0)}\lambda^{-d/3}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda^{1/3} y\cdot Hy/2} b_\lambda(y)dy\end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで $y = \lambda^{1/3}x$ で

$$b_\lambda(y) = \exp\big[-\frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3} y^\alpha \int_0^1 (1-t)^2 (\partial^\alpha\varphi)(t\lambda^{-1/3}y)dt\big] a(\lambda^{-1/3}y)\chi(y). \tag{9}$$

ここで、$\lambda > 1$ に無関係な定数 $\exists C_m > 0$ があって $\sup_y |\partial_y^\alpha b_\lambda(y)| \le C_m$, $|\alpha| \le m$ となる。これより (6) を上式右辺に適用して

$$\int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2}\frac{e^{-\lambda\varphi(0)}}{(\det H)^{1/2}}(a(0) + 0(\lambda^{-1}))$$

即ち、c, b_1, b_2, p にのみよる定数 C があって $|0(\lambda^{-1})| \le C\lambda^{-1}$ となる。

式(9) の第 2 項は以下のように評価される：

$$\left|\int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)(1-\chi(\lambda^{1/3}x))dx\right| \le e^{-\lambda\Re\varphi(0)}\|a\|_{C^0}\int_U e^{-\lambda p|x|^2/4}|1-\chi(\lambda^{1/3}x)|dx$$
$$\le e^{-\lambda\Re\varphi(0)}\|a\|_{C^0} e^{-p\lambda^{1/3}c^2/8}\int_U e^{-p\lambda^{1/3}x^2/8}dx.$$

これらより、望みの結果が得られる。　□.

注意：講義では鞍点法といったが、むしろ Laplace の方法といった方が良いだろう。

1.2.3　停留点の方法（Method of Stationary Phase）

Feynman 積分は、数学的には Schrödinger 方程式の解の $\hbar$ 依存性を明らかにするのを目的としている、解の新しい表示方法であると考えられる。

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{2M}\Delta + V(x)\right]u, \quad u(x,0) = \underline{u}(x)$$

の解は積分核 $K(t,x,y)$ を用いて

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x,y)\underline{u}(y)dy$$

と書ける[2]のだが、ここで重要なのは $K(t,x,y)$ の以下の表示である。

$$K(t,x,y) = \int_{C_{t,x,y}} e^{-i\hbar S(\gamma)} d_F\gamma,$$
$$C_{t,x,y} = \{\gamma(\cdot) \in ([0,t]:\mathbb{R}^n) \mid \gamma(0) = y,\ \gamma(t) = x\},$$
$$S(\gamma) = \inf_{\gamma\in C_{t,x,y}}\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))d\tau,$$
$$L(\gamma,\dot\gamma) = \frac{1}{2M}|\dot\gamma|^2 - V(\gamma)$$

で、$d_F\gamma$ は $C_{t,x,y}$ の Lebesgue 的測度と想定されるもので、数学的には存在しない事が証明されているものである。

この表示が何故重要かは、有限次元空間のときは以下の定理が成立することで、それの類似から $\lambda = \hbar^{-1}$ として Bohr の対応原理が成立することを容易に想定させる[3]からである。以下、もっとも簡単な版を単純な形で述べておこう。

積分

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda S(x)}u(x)dx \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

の $\lambda \to \infty$ での挙動について考える。

定理 1.2.9 (Method of Stationary Phase) $S(x)$ を実数値 C^2 級関数とし。$\nabla S(x_0) = 0$ かつ $\det(\partial^2 S/\partial x_i\partial x_j) \neq 0$ を満たす点 $x_0 \in \mathrm{supp}\ u$ が唯一つ存在するとする。$\lambda \in \mathbb{R}$ で $|\lambda| \ge 1$ のとき

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\left|\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right|^{-1/2} u(x_0)\exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right] \quad (\lambda\to\infty).$$

ここで $f(\lambda) \sim g(\lambda)$ とは $\lambda \to \infty$ のとき $|f(\lambda) - g(\lambda)| = 0(\lambda^{-(n/2)-1})$ とする。

[2] ここは今まで習ってきたような普通の積分と考えない方が良い
[3] 現時点では、この想定には重大な欠陥がある

これの証明は割愛するが、Feynman 積分の数学的とは言えないがもっとも重要な意味は、Schrödinger 方程式の解の経路積分表示をして Planck 定数 $\hbar$ への依存性をハッキリさせたことである。それによって、$\hbar$ を 0 に持っていく操作をこの積分表示に停留点法を真似て施すと、古典力学が見えてくるとしたことである。即ち、Bohr の対応原理を少なくとも物理学的には自然に説明できるとしたことである。

注意：C を複素平面 z での閉曲線、$f(z)$ と $u(z)$ を z の解析関数とし積分

$$I(\lambda) = \int_C e^{i\lambda f(z)} u(z) dz$$

の $\lambda \to \infty$ での挙動を調べる方法を鞍点法 (Saddle point method), 最速降下法 (Steepest descent method) という。これについては、見通しの良い一般論は知られていないと思われる。即ち、複素平面で最速降下線を見つけてそこで積分するということが、言うは易く行なうは難しいのである！