多次元Riemann積分の定義と性質（解析概論 II　追補）井上淳

1　多次元 Riemann 積分

1.1　多次元 Riemann 積分の定義と性質

定義 1.1.1 n 次元有界閉区間とは $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ なるものをいう。その内部は $\mathring{I} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ であり、有界開区間という。

n 次元有界閉区間

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (1 \leq i \leq n)\}$$

に対してその体積を

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

直径を $d(I) = \sup_{x,y \in I} |x - y|$ と定める[1]。

定義 1.1.2 n 次元有界閉区間 I の分割 Δ とは、その n 個の辺 $[a_i, b_i]$ の分割 Δ_i を合わせたものをいう。Δ_i により $[a_i, b_i]$ が $m_i + 1$ 個の分点で m_i 個の小区間の合併となるとすれば、Δ により I は（内点を共有しない）$\prod_{i=1}^{n} m_i = m$ 個の n 次元有界閉区間の合併になる。この m 個の小区間に適当な順序で番号をつけ、それを I_k とすると、

$$|I| = \sum |I_k| \tag{1}$$

となる。I_k の直径を $d(I_k)$ とするとき

$$d(\Delta) = \max d(I_k)$$

を分割 Δ の幅 *(mesh)* という。I の分割全体の集合を $\mathcal{D} = \mathcal{D}(I)$ と記す。

演習問題：(1) を n に関する帰納法で示せ。

定義 1.1.3 n 次元有界閉区間 I 上で定義された実数値関数 f が与えられているとする。I の任意の分割 Δ に対し、Δ によって定まる各小閉区間 I_k の中に目印点 ξ_k を任意に取り

$$s(f; \Delta; \Xi) = \sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k)|I_k|$$

と定め、これを f の Δ に関する *Riemann* 和という。ここで、$K(\Delta)$ は分割 Δ の小閉区間の添字の集合 $\{k\}$ を表す。もしある実数 J が存在して I_k の目印点 ξ_k によらず

$$\lim_{d(\Delta) \to 0} s(f; \Delta; \Xi) = J, \quad \Xi = \{\xi_k\} \tag{2}$$

となるとき、f は I 上で R 可積分であるといい、J を f の I 上での *Riemann* 積分（値）といい

$$J = \int_I f = \int_I f(x)dx = \int \cdots \int_I f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

等と書き表わす。また、n 次元有界閉区間 I 上で R 可積分な実数値関数全体を $\mathcal{R}(I)$ で表示する。

[1] 当然の疑問 $|\mathring{I}| = |I|$? については後で説明する

注意：(2) は任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、$d(\Delta) < \delta$ を満たす任意の分割 $\Delta \in \mathcal{D}$ 及び任意の目印点 $\Xi = \{\xi_k\}$ に対し

$$\left| s(f;\Delta;\Xi) - J \right| < \epsilon$$

となることである。

注意：ここで『有界閉区間上で R 可積分な関数は有界関数である』を１次元の場合に念のために説明しておこう（多次元でも全く同様）：

> f が $I = [a, b]$ 上で R 可積分とする。ある数 J（＝積分値）があって $\epsilon = 1$ として、ある $\delta > 0$ があって分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ が $d(\Delta) < \delta$ を満たすならば
>
> $$|S(f;\Delta;\Xi) - J| < 1 \quad S(f;\Delta;\Xi) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$
>
> となる。ここで目印点 $\Xi = \{\xi_j\}$ は $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ なる限り任意に取れたので、$\xi_j = x_j$ $(j = 2, 3, \cdots, m)$ と固定すると、
>
> $$|f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \sum_{j=2}^{m} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) - J| < 1$$
>
> となる。即ち、
>
> $$J - 1 - \sum_{j=2}^{m} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) < f(\xi_1)(x_1 - x_0) < J + 1 - \sum_{j=2}^{m} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$
>
> であり、任意の $\xi_1 \in [x_0, x_1]$ に対して
>
> $$(x_1 - x_0)^{-1}\left[J - 1 - \int_{x_1}^{b} f(x)dx\right] \le f(\xi_1) \le (x_1 - x_0)^{-1}\left[J + 1 - \int_{x_1}^{b} f(x)dx\right]$$
>
> より f は $[x_0, x_1]$ 上で有界であることになる。これを各小区間で繰り返せば良い。 □

定理 1.1.1 (積分の性質) *(1)* $\mathcal{R}(I)$ は実ベクトル空間で、I 上の R 積分は $\mathcal{R}(I)$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である。
(2) $f, g \in \mathcal{R}(I),\ f(x) \ge g(x)\ (\forall x \in I) \Longrightarrow \int_I f \ge \int_I g.$

問：(2) で $f(x) \ge g(x)$ $(\forall x \in I)$ と仮定しているが、本当に任意の $x \in I$ で $f(x) \ge g(x)$ なることは必要なのだろうか？

定理 1.1.2 (積分の第一平均値定理) 有界可積分関数 $f : I \to \mathbb{R}$ の I における上限を M, 下限を m とすると、ある数 μ $(m \le \mu \le M)$ があって

$$\int_I f = \mu|I|$$

となる。特に、f が I 上連続ならば、$\xi \in I$ があって $f(\xi) = \mu$ となる。

定理 1.1.3 (積分の平行移動不変性) 任意に $c \in \mathbb{R}^n$ をとり固定し、$\mathbb{R}^n$ の平行移動 $T_c : \mathbb{R}^n \ni x \to x + c \in \mathbb{R}^n$ を定める。このとき,
(1) 有界閉区間 I の体積 $|I|$ は平行移動 T_c で不変である。即ち、$|I + c| = |I|$.
(2) 関数 f が $I + c$ 上で R 可積分とすると、$f \circ T_c$ は I 上で R 可積分で

$$\int_{I+c} f = \int_I f \circ T_c$$

が成り立つ。

上の３つの定理は積分の定義に戻って考えれば明らかなので証明は省略する。

３つめの「積分の平行移動不変性」は極めて重要な性質で、一般に無限次元空間ではこのような良い性質をもつ『体積』は恒等的にゼロとなるもの以外には無い、という困った事になっている。これについては、後にもう少し説明して測度論への橋渡しをしたいと考えている。

1.2 累次積分

1 変数の積分計算は、置換積分とか部分積分を用いて幾つかの（不定積分に関する）「基本公式」に帰着させる。では多変数の場合はどうするのか？それが多重積分の累次積分への変換によってなされる。即ち、$I=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ 上の R 可積分関数 f の積分は

$$\int_I f(x)dx=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

と、次元が低い積分に帰着させて実行される。

以下では、より一般の状況で考察する。$n=p+q$ となる整数 $p,q\geq 1$ をとり、n 次元有界閉区間 $I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上の積分を、p 次元有界閉区間 $J=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_p,b_p]$ と q 次元有界閉区間 $K=[a_{p+1},b_{p+1}]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ の上の積分に分解する事を考える。区間の体積は

$$|I|=|J|\,|K| \tag{3}$$

となることは明らかであろう。記号として

$$z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n,\ x=(z_1,\cdots,z_p)\in\mathbb{R}^p,\ y=(z_{p+1},\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^q,\quad z=(x,y)$$

を用いる。I の分割 Δ は J,K の分割 Δ',Δ'' を与え、逆に J,K の分割 Δ',Δ'' に対し、それらの分点をあわせれば $I=J\times K$ の分割 Δ、$\Delta=\Delta'\times\Delta''$ が定まる。この場合、各 $k\in K(\Delta)$ に対して $I_k=J_l\times K_m, l\in K(\Delta'), m\in K(\Delta'')$ なる形になるから、$k=(l,m)$ と書けば

$$K(\Delta)=K(\Delta')\times K(\Delta'')$$

となる。

定理 1.2.1 有界関数 $f:I=J\times K\to\mathbb{R}$ が
(a) f は I 上 R 可積分,
(b) 各 $x\in J$ を固定するとき、y の関数 $f^x:K\ni y\to f^x(y)=f(x,y)$ は K 上 R 可積分とする。

このとき $F(x)=\displaystyle\int_K f(x,y)dy$ は J 上 R 可積分で

$$\int_I f(z)dz=\int_J\left\{\int_K f(x,y)dy\right\}dx. \tag{4}$$

証明：I の任意の分割 $\Delta=\Delta'\times\Delta''$ をとり、小区間 $I_k=J_l\times K_m, l\in K(\Delta'), m\in K(\Delta'')$ 上での f の上限と下限を M_k,m_k とすると、任意の $z_k=(x_k,y_k)\in I_k$ に対して

$$m_k\leq f(x_k,y_k)\leq M_k$$

が成り立つ。(b) より $f^x:y\to f(x,y)$ は K_m 上で R 可積分だから

$$m_k|K_m|\leq\int_{K_m}f(x,y)dy\leq M_k|K_m|\quad(\forall x\in J_l)$$

が成立する。この式で $m \in K(\Delta'')$ について加えあわせると

$$\sum_{m\in K(\Delta'')} m_k|K_m| \le \sum_{m\in K(\Delta'')} \int_{K_m} f(x,y)dy = F(x) \le \sum_{m\in K(\Delta'')} M_k|K_m|$$

となる。任意の $\xi_l \in J_l$ をとり、上式で $x=\xi_l$ とおき、$|J_l|$ を掛け $l \in K(\Delta')$ に関して足し合わす。$|I_k| = |J_l|\,|K_m|$ に注意すれば

$$s_\Delta(f) = \sum_{k\in K(\Delta)} m_k|I_k| \le s(F;\Delta';\Xi) \le \sum_{k\in K(\Delta)} M_k|I_k| = S_\Delta(f)$$

が得られる。仮定 (a) より $d(\Delta) \to 0$ とすると、上の不等式の両端は共に $\int_I f$ に収束する。$d(\Delta) \to 0$ は $d(\Delta') \to 0$ かつ $d(\Delta'') \to 0$ と同値だから

$$\lim_{d(\Delta')\to 0} s(F;\Delta';\Xi) = \int_I f(z)dz$$

が得られる。これは $F(x) = \displaystyle\int_K f(x,y)dy$ が J 上 R 可積分なることを示す。これより(4) が成立する。 □

系 1.2.1 有界関数 $f: I = J\times K \to \mathbb{R}$ が定理 *1.2.1* の条件 *(a), (b)* 及び
(c) 各 $y \in K$ を固定するとき、x の関数 $f^y : J \ni x \to f^y(x) = f(x,y)$ は J 上 R 可積分とする。

このとき、次の等式が成立する：

$$\int_I f(z)dz = \int_J \left\{ \int_K f(x,y)dy \right\} dx = \int_K \left\{ \int_J f(x,y)dx \right\} dy. \tag{5}$$

定理 1.2.2 有界関数 $f: I = J\times K \to \mathbb{R}$ が $I = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上で R 可積分で、任意の $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ に対し次の (P_k) を満たすとする：
(P_k) : $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_k,b_k] = J_k$ の任意の点 $(x_1,\cdots,x_k)$ を固定するときの関数 $f^{x_1,\cdots,x_k} : (x_{k+1},\cdots,x_n) \to f(x_1,\cdots,x_n)$ は $K_k = [a_{k+1},b_{k+1}]\times[a_n,b_n]$ 上 R 可積分とする。
このとき

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \cdots \left\{ \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\cdots,x_n)dx_n \right\} \cdots \right\} dx_2 \right\} dx_1.$$

証明：上の定理 1.2.1 を用い、n に関する帰納法で示す。 □

定理 1.2.3 n 次元有界閉区間 $I = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ を p 次元有界閉区間 J と q 次元有界閉区間 K とに $I = J\times K$ と直積分解し、I の元 z を $z = (x,y)$ $(x\in J, y \in K)$ と表示する。
f が I 上連続とすると、f は定理 *1.2.1* の条件 *(a), (b)* 及び定理の系 *1.2.1* の条件 *(c)* を満たす。

証明：これの証明は既に説明した定理を用いれば易しいので省略する。 □

演習問題：以下の重積分の値を求めよ。

$$(a)\ \iint_D \frac{x}{y^2}dxdy,\ D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le x^2,\ 2 \le x \le 4\},$$
$$(b)\ \iint_D x^2 y dxdy,\ D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}.$$

演習問題：以下の積分の順序を変更せよ。

$$(a)\ \int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy, \quad (b)\ \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)dr.$$

1.3　R 可積分関数の Lebesgue による特徴付け

この内容は「1 次元 HK 積分」で説明したので省略する。

1.4　有界集合上の積分

定義 1.4.1 $\mathbb{R}^n$ の有界集合 A に対し有界閉区間 I を $A \subset I$ なるように取り、A 上の関数 f を拡張して $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定める：

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

この $\tilde{f}$ が I 上で R 可積分のとき、f は A 上で R 可積分といい[2]

$$\int_A f = \int_I \tilde{f}$$

によって、f の A 上の積分 $\displaystyle\int_A f$ を定義する。

命題 1.4.1 f の A における R 可積分性及びその積分値 $\displaystyle\int_A f$ は、定義に用いた $A \subset I$ なる I の取り方によらない。

証明：(a) $A \subset I \subset I'$ となる 2 つの有界閉区間 I, I' をとる。$\tilde{f}$ が I' で R 可積分ならば、$\tilde{f}$ は I でも R 可積分である[3]。逆に、$\tilde{f}$ が I で R 可積分ならば、I' でも R 可積分である（実際、I' の分割 Δ で、ある $k \in K(\Delta)$ に対し $I'_k = I$ となるものをとれば、$j \in K(\Delta), j \neq k$ のとき $\mathring{I'_j}$ 上で $\tilde{f} = 0$ だから、$\tilde{f}$ は I'_j 上で R 可積分だからである）。このとき、$\int_{I'_j} f = 0\ (j \neq k)$ だから、有界閉区間に関する加法定理より

$$\int_{I'} \tilde{f} = \sum_{i \in K(\Delta)} \int_{I'_i} \tilde{f} = \int_I \tilde{f}$$

となる。
(b) $A \subset I \subset I_1$ となる任意の 2 つの有界閉区間 I, I_1 に対して $I, I_1 \subset I'$ なる有界閉区間 I' をとって (a) の議論を用いる。すると、『$\tilde{f}$ が I で R 可積分 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$ が I' で R 可積分 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$ が I_1 で R 可積分』となり、

$$\int_I \tilde{f} = \int_{I'} \tilde{f} = \int_{I_1} \tilde{f}. \qquad \square$$

定義 1.4.2 A の特性関数 χ_A が I 上で R 可積分のとき、集合 A を体積確定（或いは *Jordan* 可測）であるといい、

$$|A| = \int_I \chi_A(x)dx$$

を A の（n 次元）体積と言う。2 次元体積を面積、1 次元体積を長さという。

● 面積確定しない集合:$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x, y \text{ は有理数 }\}$ とおく。どんな数も有理数で近似出来ることから $0 = \underline{A} < \overline{A} = 1$ なることが分かる。即ち、A は面積確定しない集合である。

[2] 以下で I の取り方によらず well-defined なことを示す
[3] これはどう示されたか？

命題 1.4.2 $\mathbb{R}^n$ の有界集合 A に対し有界閉区間 I を $A \subset I$ なるように取る。A 上の関数 f を拡張して $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ とするとき、
(1) f は A 上で R 可積分 $\Longleftrightarrow \tilde{f}\chi_A$ は I 上で R 可積分,
(2) f が A 上 R 可積分ならば、$B \subset A$ となる任意の体積確定集合 B に対して f の B への制限は B 上 R 可積分である、
(3) $B \subset A$ で f が B 上 0 に等しければ、『f は A 上で R 可積分 $\Longleftrightarrow f$ は $A \setminus B$ 上で R 可積分』で、このとき $\displaystyle\int_A f = \int_{A\setminus B} f$ となる。

証明：(1) $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)\chi_A(x)$ なることを用いれば明らか。
(2) f が A 上 R 可積分ならば、$\tilde{f}$ は I 上 R 可積分。B は体積確定だから、χ_B は I 上 R 可積分、2つの R 可積分な関数の積もまた R 可積分だから、$\tilde{f}\chi_B = (\widetilde{f|_B})\chi_B$ も I 上 R 可積分、故に (1) より f は B 上で R 可積分となる。
(3) f は B 上 0 だから $\tilde{f} = (\widetilde{f|_{A\setminus B}})$ が従う。これより結論が導かれる。 $\Box$

定理 1.4.1 A を $\mathbb{R}^n$ の有界集合とする。
(1)［線形性］ A 上 R 可積分な実数値関数全体を $\mathcal{R}(A)$ とすると、これは実ベクトル空間をなし、写像 $f \to \int_A f$ は $\mathcal{R}(A)$ 上の線形写像である。
(2)［単調性］ $f \le g$ ならば $\displaystyle\int_A f \le \int_A g$ であり、特に、共に体積確定な $A \subset B$ に対して $|A| \le |B|$ である。
(3)［平行移動不変性］ f が $A + c$ 上 R 可積分ならば、$f \circ T_c$ は A 上 R 可積分で $\displaystyle\int_{A+c} f = \int_A f \circ T_c$ となる。特に、A が体積確定ならば、$A + c$ もそうであり $|A + c| = |A|$ が成り立つ。
(4)［三角不等式］ f が A 上 R 可積分ならば、$|f|$ も A 上 R 可積分で $\displaystyle|\int_A f| \le \int_A |f|$ となる。
(5)［積の R 可積分性］ f, g が有界な $\mathcal{R}(A)$ の元のとき、$fg \in \mathcal{R}(A)$ である。
(6)［第一平均値の定理］ A が体積確定で、$m \le f \le M$ ならば、$\mu \in [m, M]$ があって $\int_A f = \mu|A|$ となる。

証明：これは易しいので、各自補っておいて欲しい。

命題 1.4.3 任意の有界関数 f は体積 0 の集合 A 上で R 可積分で $\displaystyle\int_A f = 0$ となる。

証明：f は有界だから、$|f(x)| \le C$ $(\forall x \in A)$ なる定数 C が存在する。A を含む I の任意の分割 Δ と I_k $(k \in K(\Delta))$ の目印点 ξ_k に対して、$\tilde{f}(\xi_k) = \tilde{f}(\xi_k)\chi_A(\xi_k)$ だから

$$\begin{aligned}|s(\tilde{f}; \Delta; \Xi)| = |\sum_{k\in K(\Delta)} \tilde{f}(\xi_k)\chi_A(\xi_k)|I_k|| &\le C \sum_{k\in K(\Delta)} \chi_A(\xi_k)|I_k| \\ &= Cs(\chi_A; \Delta; \Xi) \to C\int_A 1 = C|A| \ (d(\Delta) \to 0)\end{aligned}$$

となる。故に、$\tilde{f}$ は I 上で R 可積分、f は A 上で R 可積分で、$\displaystyle\int_A f = \int_I \tilde{f} = 0.$ $\Box$

定理 1.4.2 (積分範囲に関する加法性) A, B は共に $\mathbb{R}^n$ の有界集合で $|A \cap B| = 0$ とし、$f : A \cup B \to \mathbb{R}$ は有界関数とする。
(a) f が A 及び B 上で R 可積分ならば、$A \cup B$ 上でも R 可積分で以下が成り立つ：

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f \tag{6}$$

(b) 逆に f が $A \cup B$ 上で R 可積分で、A, B が体積確定ならば、f は A 及び B 上で R 可積分で(6) が成立する。

証明：$A\cup B\subset I$ なる有界閉区間 I をとり、$A\cup B$ の外では 0 として f を $\tilde{f}$ に拡張する。$|A\cap B|=0$ だから、命題??より

$$\int_I \tilde{f}\chi_{A\cap B}=\int_{A\cap B} f=0.$$

(a) f が A、B 上で R 可積分より、$\tilde{f}\chi_A$、$\tilde{f}\chi_B$ は I 上で R 可積分である。$\tilde{f}$ を関係式

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$$

に掛けると、積分の線形性より、$\tilde{f}\chi_{A\cup B}$ は I 上で R 可積分となる。つまり、f は $A\cup B$ 上で R 可積分で

$$\int_{A\cup B} f=\int_I \tilde{f}\chi_{A\cup B}=\int_I \tilde{f}\chi_A+\int_I \tilde{f}\chi_B-\int_I \tilde{f}\chi_{A\cap B}=\int_A f+\int_B f.$$

(b) A、B は体積確定だから、f が $A\cup B$ 上で R 可積分ならば、f は A、B 上で R 可積分である。これと (a) より(6) が成立する。　□

注意：「関係式 $\tilde{f}=\tilde{f}\chi_A$ は当たり前で何故 χ_A をわざわざ掛けるのか考え込んでしまった」という質問があった。それは、この講義録には書いてある証明を講義では略したからであろう。(a) において関係式 $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$ に $\tilde{f}$ を掛けて(6) を導いたが、そのとき左辺の $\int_{A\cup B} f=\int_I \tilde{f}\chi_{A\cup B}$ とか $\int_A f=\int_I \tilde{f}\chi_A$ で有効に用いられていると考えられないだろうか？

定理 1.4.3 (体積の有限加法性) *(1)* A,B が $\mathbb{R}^n$ の有界な体積確定集合ならば、$A\cup B$、$A\cap B$、$A\setminus B$ も体積確定で以下が成り立つ：

$$|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B| \tag{7}$$

$$|A\setminus B|=|A|-|A\cap B| \tag{8}$$

(2) $\mathbb{R}^n\supset A_1,A_2,\cdots,A_m$ が有限個の体積確定集合ならば、$A=\bigcup_{i=1}^m A_i$ は体積確定であり、

$$|\bigcup_{i=1}^m A_i|=\sum_{i=1}^m |A_i|-\sum_{i=1}^{m-1}|\cup_{k=1}^i A_k\cap A_{i+1}|. \tag{9}$$

(3) 有限個の体積確定集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ に対し

$$|A_i\cap A_j|=0\ (i\neq j)\Longrightarrow |\bigcup_{i=1}^m A_i|=\sum_{i=1}^m |A_i|. \tag{10}$$

更に、このとき有界関数 f が A 上 R 可積分ならば、f は各 A_i 上で R 可積分で、

$$\int_A f=\sum_{i=1}^m \int_{A_i} f. \tag{11}$$

演習問題：これを証明せよ（ヒント：$\chi_A\chi_B=\chi_{A\cap B},\chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}$）。

系 1.4.1 有限個の体積確定集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ に対し

$$[\underline{\text{体積の有限劣加法性}}]\quad |\bigcup_{i=1}^m A_i|\leq\sum_{i=1}^m |A_i|, \tag{12}$$

また

$$|A_i|=0\Longrightarrow |\cup_{i=1}^m A_i|=0,$$

が従う。

系 1.4.2 A を体積確定な有界集合とし、f, g を有界関数で $B = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ が $|B| = 0$ とすると、f と g は同時に A 上で R 可積分で

$$\int_A f = \int_A g = \int_{A \setminus B} f = \int_{A \setminus B} g.$$

f, g が A 上 R 可積分なることと、それらが $A \setminus B$ 上 R 可積分なることは同値である。

演習問題：(1) 有界閉区間 $I = [a_1, b_a] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ の体積は $|I| = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$ である。
(2) a_k を定数とするとき、超平面 $H_k = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_k = a_k\}$ に含まれる有界集合 A の n 次元体積は 0 である。
(3) 有界開区間 $I = (a_1, b_a) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ の体積は $|I| = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$ である。

2 広義 Riemann 積分

2.1 １次元広義 Riemann 積分

有界閉区間上の有界関数の R 積分可能性から、２つの有界性の制限を取ることを考える。

2.1.1 広義積分（有界区間での非有界関数の積分）

命題 2.1.1 半開区間 $(a, b]$ で $f,\ g$ は連続で、 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ とする。広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束する。

2.1.2 広義積分（非有界区間での積分）

定義 2.1.1 $f(x)$ が無限区間 $[a, \infty)$ で定義されていて、任意の b $(b > a)$ に対して積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$（これは有界閉区間上の広義 R 積分でもよい）が存在するとする。このとき、有限な極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が存在するとき、$f(x)$ は $[a, \infty)$ で（広義）R 積分可能であるといい、この極限値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ と記す。

命題 2.1.2 $\mathbb{R}$ 上の半開区間 $I = [a, b)$ $(b \leq \infty)$ 上で定義された実数値関数 f が、任意の $t \in I$ に対し有界閉区間 $[a, t]$ 上では有界で R 可積分なるものとする。この時、以下は同値である：

1. $\displaystyle\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx$ が存在する。

2. 任意の $\epsilon > 0$ に対し $c \in I$ があって $c < v < u < b$ ならば $\left|\displaystyle\int_v^u f(x)dx\right| < \epsilon$ となる。

更に、

命題 2.1.3 $\mathbb{R}$ 上の半開区間 $I = [a, b)$ *(*$b \leq \infty$*)* 上で定義された実数値関数 f, g が、任意の $t \in I$ に対し有界閉区間 $[a, t]$ 上では有界で R 可積分なるものとする。この時、以下が成立する。

1. $J=\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|dx$ が存在すれば $I=\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx$ も存在し、$|I|\le J$ となる。

2. f に対しある g があって、*(a)* $|f(x)|\le g(x)$ $(\forall x\in I)$、*(b)* $\lim_{t\to b}\int_a^t g(x)dx$ が存在する、となるならば、$I=\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|dx$ も存在し、$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|dx \le \lim_{t\to b}\int_a^t g(x)dx$ である。

定理 2.1.1 関数 $f:I=[a,b)\to\mathbb{R}$ が、任意の $t\in I$ に対し $[a,t]$ 上、R 可積分であり、以下の条件のいずれかを満たせば、極限 $\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|dx$ が存在する。

1. $b=+\infty$ で、$f(x)=0(x^\alpha)$ $(x\to\infty)$、 $\alpha<-1$ となる。

2. $b\in\mathbb{R}$ で、$f(x)=0((b-x)^\beta)$ $(x\to b-0)$、 $\beta>-1$ となる。

2.1.3 広義 R 積分（非有界区間、非有界関数の積分）

例１：典型例として

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx(=\frac{\pi}{2})$$

が収束することを示そう。その収束値については後で計算法を述べる。

[積分が収束すること]：$x\to 0$ のとき $\sin x/x\to 1$ であるから $x=0$ は積分の特異点ではない。$0<a<b$ とすると、部分積分して

$$\begin{aligned}\left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx-\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx\right| &= \left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \\ &= \left|\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_a^b-\int_a^b\frac{\cos x}{x^2}dx\right| \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\int_a^b\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{a}\end{aligned}$$

となる。故に $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$ が存在する。

注意：

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx>\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}.$$

これより、$\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}|dx$ は発散する。故に、$f(x)$ が広義積分可能でも $|f(x)|$ は広義積分可能とは限らない。

例２：Gamma 関数の導入。積分

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

は任意の s $(s>0)$ に対して存在し、次の性質が成立する：

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\quad(s>0),\qquad \Gamma(n)=n!\quad(n\in\mathbb{N}).$$

注意（絶対収束）：$f(x)$ が広義積分可能でも $|f(x)|$ は広義積分可能とは限らない。そこで、

定義 2.1.2 $|f(x)|$ がある区間で広義積分可能であるとき、$f(x)$ は絶対可積であるといい、$f(x)$ の広義積分は絶対収束するという。収束しているが、絶対収束でない広義積分は条件収束するという。

例：広義 R 積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は条件収束である。

比較：級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ が条件収束するか、絶対収束するかという概念を思い出そう。例えば、$\sum_{n=1}^\infty(-1)^n/n$ は条件収束級数であって絶対収束級数ではない。

2.2 多次元広義 Riemann 積分

2.2.1 被積分関数が有界でない場合

定義 2.2.1 面積を持つ有界集合 D 上の関数 f を考える。まずは、f は連続で正値とする。D が閉集合でなければ f は必ずしも有界ではない。D に含まれる任意の、面積を持つ閉集合 K では f は有界であり積分 $I(K) = \displaystyle\iint_K f(x,y)dxdy$ が定まる。K が D に含まれる面積を持つ閉集合をすべて動く時、$I(K)$ が有界の時、f は D 上 R 可積分であるという。これの上限を f の D 上の R 積分といい

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sup_K I(K)$$

と表す。

注意：f が負値の場合は $-f$ を考えれば同様に定義される。また、任意の連続関数 f に対しては、

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+(x,y) = \max\{f(x,y),0\},\ f_-(x,y) = \max\{-f(x,y),0\} = \min\{f(x,y),0\}$$

と分解し、集合

$$D_+ = \{(x,y) \in D \mid f(x,y) \geq 0\}, \quad D_- = \{(x,y) \in D \mid f(x,y) \leq 0\}$$

が面積を持つことを示し、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_+} f(x,y)dxdy - \iint_{D_-} f(x,y)dxdy$$

と定義する。

質問：「集合 D_+ や D_- が面積を持つことを示し」とあるが、では体積確定であるかと言う質問があった。これらは有界集合ではあるのだから、これらが体積確定であるかどうかは、その境界の体積が 0 であるかどうかで定まる。また、面積確定な有界集合の相対的閉集合は面積確定であるのか？という問題になる。

例：領域を $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y < x \leq 1\}(0 < \alpha < 1)$ と定める時、$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$.

（証）$D_n = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n},\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$ とおく。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha} = \int_{1/n}^1 \left[\int_0^{x-1/n} (x-y)^{-\alpha} dy\right] dx = \int_{1/n}^1 \left[\frac{(x-y)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right]_0^{x-1/n} dx \\ &= \int_{1/n}^1 \frac{x^{1-\alpha} - (1/n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\frac{1-(1/n)^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}, \end{aligned}$$

故に、$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$. □

2.2.2 積分領域が有界でない場合

定義 2.2.2 *(i)* 平面の点の集合 D が有界でない場合、原点を中心とする一辺の長さ s の正方形と D の共通部分を $D(s)$ とし、各 $D(s)$ は面積を持つとする。f を D 上の連続関数で $f(x,y) \geq 0$ とする。f が各 $D(s)$ 上で R 可積分であり、s が正の実数を動く時、積分の値 $I(s) = \iint_{D(s)} f(x,y)dxdy$ が有界のとき、f は D 上で R 可積分であると言う。 $\sup_s I(s) = \lim_{s\to\infty} I(s)$ を f の D 上の積分と言い $\iint_D f(x,y)dxdy$ と書く。

(ii) 平面の点の集合 D の定義関数 $\chi_D(x,y)$ が D 上 R 可積分のとき、D は（有限な）面積を持つという。$\displaystyle\iint_D \chi_D dxdy$ を D の面積と言って $|D|$ と書く。

注意：上とは見かけが少し異なる定義を述べよう。

定義 2.2.3 必ずしも有界ではない平面上の点集合 D に対し、D の近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する。

(i) $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset D$.

(ii) 各 K_n は有界閉集合である。

(iii) D 内の任意の有界閉集合 K に対し、ある n があって $K \subset K_n$.

定義 2.2.4 D は近似列を持つとする。f は D 上の関数で、D に含まれる任意の有界閉集合上で積分可能とする（f は D 上で局所 R 可積分という）。

D の任意の近似列 $\{K_n\}$ に対して、有限な極限値 $J = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f dxdy$ が存在するとき、f は D 上で広義 R 積分可能（広義 R 可積）といい、この値を $J = \iint_D f dxdy$ と書く。

問：J の値は近似列 $\{K_n\}$ の取り方によらないことを示せ。

問：$0 < a < b$ のとき

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log a - \log b$$

を示せ。（ヒント：$\displaystyle\int_a^b e^{-xy} dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$）

解答：$D = \{(x, y) \mid 0 \le x < \infty,\ a \le y \le b\}$ とおき、重積分 $\iint_D e^{-xy} dxdy$ を考える。次式 $\displaystyle\int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-xy} dx \right) dy$ から分かるようにこれは積分可能だから、Fubini 定理により所期の結果が得られる。

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \left(\int_a^b e^{-xy} dy \right) &= \iint_D e^{-xy} dxdy = \int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-xy} dx \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y} dy = \log a - \log b. \qquad \square\end{aligned}$$

例：$\displaystyle\iint_{0\le x,y} \frac{dxdy}{1 + (x+y)^{\alpha}}$ は $\alpha > 2$ のとき収束、$\alpha \le 2$ のとき発散する。

（証） $D_n = \{(x, y) \mid 0 \le x, 0 \le y, x + y \le n\}$ と定めると、$D_{n+1} \setminus D_n$ において、$n < x + y \le n + 1$ であり、$D_{n+1} \setminus D_n$ の面積は $n + 1/2$ である。故に、

$$\frac{n + 1/2}{1 + (1+n)^{\alpha}} < \int_{D_{n+1}\setminus D_n} \frac{dxdy}{1 + (x+y)^{\alpha}} < \frac{n + 1/2}{1 + n^{\alpha}}$$

これから、

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n + 1/2}{1 + (1+n)^{\alpha}} < \int_{D_{N+1}} \frac{dxdy}{1 + (x+y)^{\alpha}} < \sum_{n=0}^{N} \frac{n + 1/2}{1 + n^{\alpha}}$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1/2}{1+(1+n)^{\alpha}}$、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1/2}{1+n^{\alpha}}$ の収束、発散は級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^{\alpha-1}}$ のそれと同時である。 $\square$

● 例：$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

積分値の求め方 1 ：関数

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1} & 0 < x \le \pi, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

が $[0, \pi]$ で連続であること及び $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi g(x)\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)dx = 0$ （Riemann-Lebesgue の定理）を用いて

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos\, t + \cos\, 2t + \cdots + \cos\, nt\right)dt = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

積分値の求め方 2 (収束因子を用いる方法) ：

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

と定義でき、微分もできて

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \quad (t > 0), \qquad \lim_{t\to\infty}F(t) = 0$$

となる。これより

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan\, t \quad (t > 0)$$

であり、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{t\to 0}F(t) = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

積分値の求め方 3 (重積分を用いる方法) ： $t > 0$ とすると以下の広義 R 積分は

$$\int_0^\infty e^{-tx}\cos\, sx\, dx = \frac{t}{t^2+s^2}$$

であり、この積分は s に関して一様に収束する。故に、積分の順序交換が出来て

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty e^{-tx}\cos\, sx\, dx\right)ds = \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-tx}\cos\, sx\, ds\right)dx = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

となる。上式より

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{t}{t^2+s^2}ds = \arctan\, \frac{1}{t} \quad (t > 0)$$

となるから、$t \to 0$ として結果が従う。

3 多次元 Riemann 積分記号下での変数変換

1 月 13 日の講義録で述べた分の追補：

例（極座標）:

$$x = r\cos\, \theta,\ y = r\sin\theta,\ (0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

は $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi] \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$ の写像を与え、その Jacobi 行列式は

$$J(r, \theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\, \theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\, \theta \end{pmatrix} = r$$

となる。

注意：原点 $r=0$ で Jacobi 行列式が 0 となり、そこでは積分記号下での変数変換公式がそのままでは成立しないので、積分を $(r,\theta)\in[0,\infty)$ での広義積分として解釈する。

● 例：$A_\epsilon(a)=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ \epsilon^2\leq x^2+y^2\leq a^2\}$ とする。積分記号下で極座標変換をすれば

$$\iint_{A_\epsilon(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_{r=\epsilon}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi/2}e^{-r^2}rdrd\theta=\frac{\pi}{2}[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_\epsilon^a=\frac{\pi}{4}[e^{-\epsilon^2}-e^{-a^2}]$$

となる。故に

$$\iint_{A_0(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{A_\epsilon(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}[1-e^{-a^2}].$$

そこで $f(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$ なる積分を計算するために $D(a)=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq a\}$ とおき

$$f(a)^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\cdot\int_0^a e^{-y^2}dy=\int\int_{D(a)}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

を考える。$A(a)\subset D(a)\subset A(\sqrt{2}a)$ であり、そこで $e^{-x^2-y^2}\geq 0$ だから、積分の性質を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}[1-e^{-a^2}]&=\iint_{A(a)}e^{-x^2-y^2}dxdy\leq\iint_{D(a)}e^{-x^2-y^2}dxdy=f(a)^2\\&\leq\iint_{A(\sqrt{2}a)}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}[1-e^{-2a^2}]\end{aligned}$$

となる。ここで、$a\to\infty$ として $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\lim_{a\to\infty}f(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

少し一般化すると、任意の $\lambda>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

問：三角形 ABC を与え周の長さを L、面積を S とする。三角形 ABC の内部の点 (x,y) から周までの最短距離を $D(x,y)$ とする。この時、積分

$$\iint_{\text{三角形 } ABC \text{ の内部}} e^{-D(x,y)}dxdy$$

を L と S を用いて表示せよ。

● 例 (β 関数と Γ 関数の関係)：

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ \Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx.$$

$\mathbb{R}_+^2$ を第１象限として

$$I=\Gamma(p)\Gamma(q)=\iint_{\mathbb{R}_+^2}e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy,\quad I_M=\int_0^M\int_0^M e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy,$$

とおく。ここで変数 (x,y) を変数 (u,v) に

$$u=x+y,\ v=\frac{x}{x+y},\ 0<u<M,0<v<1,\ x=uv,\ y=u-uv,\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-u$$

と変換すると、

$$\begin{aligned}I_M&=\int_0^M\int_0^M e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\int_{u=0}^M\int_{v=0}^1 e^{-u}u^{p-1}v^{p-1}u^{q-1}(1-v)^{q-1}ududv\\&=\int_u^M e^{-u}u^{p+q-1}du\cdot\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\to(M\to\infty).\end{aligned}$$

3.1 一般座標変換

定理 3.1.1 (変数変換公式) D_1、D_2 をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。$\Phi : D_1 \to D_2$ を D_1 から D_2 への $1-1$ かつ上への写像で、$\Phi = {}^t(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ および Φ^{-1} は1階連続微分可能とし、

$$J_\Phi(x) = \det\left(\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(\Phi_1, \cdots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}$$

とする。$f(x)$ が D_2 上で積分可能となる必要十分条件は $f(\Phi(x))|J_\Phi(x)|$ が D_1 上で積分可能であり、更に

$$\iint_{D_2} f(x)dx = \iint_{D_1} f(\Phi(x))|J_\Phi(x)|dx$$

となる。

物言い：定理では f が R 可積分と主張しているのに、この証明では $f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ に対して示してあるのみである。それで良いのか？

3.2 極座標変換

2, 3 次元での極座標変換はなじみ深いであろうが、ここでは一般 n 次元でのそれを考察しよう。

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 Φ_n を

$$\begin{gathered}\Phi_n(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = (x_1, \cdots, x_n) = x \\ x_1 = r\cos\,\theta_1,\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\,\theta_2,\ \cdots, \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\cdots\theta_{n-2}\cos\,\theta_{n-1}, \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\cdots\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{gathered} \tag{13}$$

を定め、$(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ を $x = (x_1, \cdots, x_n)$ の n 次元極座標という。

命題 3.2.1 $n \geq 2$ のとき Φ_n は n 次元区間 $I = [0, \infty) \times [0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ を $\mathbb{R}^n$ の上に写し、I の内部 $\mathring{I}$ で1対1である。

証明：$n = 2, 3$ のとき命題が成り立つことは知られているので、n のとき成立するとして、$n+1$ のときを示せばよい。任意の $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ をとり $r = |x| \geq 0$ とする。$|x_1| \leq |x| = r$ だから $r > 0$ ならば、一意的に $\theta_1 \in [0, \pi]$ があって $x_1 = r\cos\,\theta_1$ と書ける。これより

$$x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = |x|^2 - x_1^2 = r^2\sin^2\theta_1$$

となる。帰納法の仮定より、

$$(\theta_2, \cdots, \theta_{n-1}) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \times \cdots \times [0, 2\pi] = J$$

が存在し、$\mathring{J}$ における1対1が示される。 □

定理 3.2.1

$$I = [s, t] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}], \quad s \leq t,\ \alpha_i \leq \beta_i\ (1 \leq i \leq n-1)$$

とする。(13) で定義される写像 Φ_n が I の内部 $\overset{\circ}{I}$ で１対１であるとき、$\Phi_n(I) = A$ とする。A 上の有界関数 f が A で R 可積分であることと、$(f \circ \Phi_n)(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \cdots \sin\,\theta_{n-2}$ が I で R 可積分であることは同値であって、可積分のとき以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
&\int \cdots \int_A f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
&\quad = \int \cdots \int_I (f \circ \Phi_n)(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \cdots \sin\,\theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}
\end{aligned} \tag{14}
$$

証明：$n = 2, 3$ のとき定理が成り立つことは知られているので、n のとき成立するとして、$n+1$ のときを示せばよい。写像 Φ_{n+1} を分解して

$$
\Phi_{n+1} = \Theta \circ \Psi,
$$
$$
(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \xrightarrow{\Theta} (r\cos\,\theta_1, r\sin\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \xrightarrow{\Psi} (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})
$$

とする。即ち、Θ は $(\theta_2, \cdots, \theta_n)$ を固定して、(r, θ_1) については２次元極座標の変換、Ψ は $x_1 = r\cos\,\theta_1$ を固定して $\rho = r\sin\theta_1$ とするとき、$(\rho, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ については n 次元極座標変換 Φ_n としたものである。すると、Fubini の定理と帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
&\int \cdots \int_A f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
&\quad = \int \cdots \int_{\Theta(I)} (f \circ \Psi)(x_1, \rho, \theta_2, \cdots, \theta_n) \rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin\,\theta_{n-1} dx_1 d\rho d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \\
&\quad = \int \cdots \int_I (f \circ \Phi_n)(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) r (r\sin\theta_1)^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \cdots \sin\,\theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

注意：2, 3 次元での極座標との関連から言うと、以下のような座標系の取り方の方が分かりやすいかもしれない：

$$
\begin{gathered}
x_1 = r\cos\;\theta_1,\; x_2 = r\sin\,\theta_1 \cos\;\theta_2,\; \cdots, \\
x_{n-2} = r\sin\,\theta_1 \sin\,\theta_2 \cdots \sin\,\theta_{n-3} \cos\;\theta_{n-2}, \\
x_{n-1} = r\sin\,\theta_1 \sin\,\theta_2 \cdots \sin\,\theta_{n-3} \sin\,\theta_{n-2} \cos\;\varphi, \\
x_n = r\sin\,\theta_1 \sin\,\theta_2 \cdots \sin\,\theta_{n-3} \sin\,\theta_{n-2} \sin\,\varphi, \\
0 < r < \infty,\; 0 < \theta_j < \pi\; (j = 1, 2, \cdots, n-2),\; 0 < \varphi < 2\pi.
\end{gathered}
$$