解析概論 II　第13回講義予定（2006年02月03日）井上淳

1　Riemann 積分概観

2　1次元 HK 積分入門

3　多次元 Riemann 積分の応用

4　ベクトル解析入門１

5　ベクトル解析入門2

5.1　Green の定理

5.2　Stokes の定理

5.3　Gauss の定理

5.4　ポテンシャルの存在条件

5.5　C^1-境界の場合の諸定理

今まで Green の定理の証明は区分的に滑らかな縦線領域の場合についてのみ考察してきた。しかし、そもそも領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が C^1-境界 $\partial\Omega$ をもつとき、この領域の解析的表示を求められるのか？即ち、ある関数 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ があって

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) < 0\},\ \Omega^e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) > 0\},\ \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) = 0\}$$

と書けるか？絵として図を解釈するのではなく、図を数式を用いて書けるか？

A　多様体なるものをちょっと

A.1　$\mathbb{R}^n$ 内の多様体とその接空間

定義 A.1.1 次の条件 *(i)–(v)* を満たす写像 f を $\mathbb{R}^n$ 内の C^r 級 $(r \geq 1)k$ 次元パラメタ付き多様体という。特に、$k = 1, 2, n-1$ のとき、それぞれ曲線、曲面、超曲面という。

(i) f の定義域 $D = D_f$ は、k 次元数空間 $\mathbb{R}^k$ の空でない開集合である。

(ii) f は D から $\mathbb{R}^n$ への C^r 級 $(r \geq 1)$ 写像で、

(iii) $\operatorname{rank} f'(u) = k \quad (\forall u \in D)$

(iv) f は D から $f(D)$ への一対一写像で、
(v) 逆写像 $f^{-1}: f(D) \to D$ は連続である。
f の像 $f(D)$ を、このパラメタ付き多様体 f の跡といい $S_p(f)$ であらわす。f の逆写像 f^{-1} を $S_p(f)$ 上の座標系という。

例：$D = \{{}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とし、$f: D \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

と定めると、f は $\mathbb{R}^3$ 内の C^∞ 級 2 次元パラメタ付き多様体である。

定義 A.1.2 $\mathbb{R}^n$ 内の 2 つの C^r 級 $(r \geq 1)k$ 次元パラメタ付き多様体 f, g は、f の定義域 D_f から g の定義域 D_g の上への C^r 級同相写像 φ が存在して

$$f = g \circ \varphi$$

となるとき（C^r 級）同値であるという。この同値関係で同一視したものを $\mathbb{R}^n$ 内の C^r 級 $(r \geq 1)k$ 次元パラメタ多様体という。

例：$S = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ は 2 次元パラメタ多様体（の跡）ではない。即ち、$S_p f = S$ となる 2 次元パラメタ付き多様体 f は存在しない。

定義 A.1.3 k と $r \geq 1$ を自然数とする。$\mathbb{R}^n$ の部分集合 M は、M の各点 p に対し、p を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U があって、$M \cap U$ がある k 次元 C^r 級パラメタ付き多様体 f の跡となるとき、$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r 級多様体であるという。このとき、f を p のまわりの M の局所パラメタ、f^{-1} を局所座標系、D_f の点の座標を ${}^t(u_1, \cdots, u_k)$ とするとき、$x_i = u_i \circ f$ と置いて $(x_1, \cdots, x_k)$ を p のまわりの局所座標という。また、$M \cap U$ をこの局所座標系の座標近傍という。$k = 1, 2, n-1$ のとき、多様体をそれぞれ曲線、曲面、超曲面という。

例：$S = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元多様体、即ち曲面である。

例：$S^{n-1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2\}$ $(a > 0)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の C^∞ 級超曲面である。

例：二次実行列の空間 $M(2,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^4$ と同一視する。$G = SL(2,\mathbb{R}) = \{x \in M(2,\mathbb{R}) \mid \det x = 1\}$ は $\mathbb{R}^4$ 内の C^∞ 級超曲面である。

定理 A.1.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 M と $r \geq 1$ に対し以下は同値である：
(a) M は $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r 級多様体である。
(b) M の各点 x に対し、x を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と、U から $\mathbb{R}^n$ の開集合 V の上への C^r 級同相写像 h があって

$$h(M \cap U) = \{y \in V \mid y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

と書き表せる。

証明：$(b) \implies (a)$ M が (b) を満たすとする。$D = \{u \in \mathbb{R}^k \mid \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V\}$ とし、$f: D \to \mathbb{R}^n$ を $f(u) = h^{-1}(u, 0)$ と定めると、f は C^r 級 k 次元 C^r 級パラメタ付き多様体であり、その跡 $f(D) = M \cap U$ となる。実際、D は $\mathbb{R}^k$ の開集合で、f は C^r 級である。h は C^r 級同相写像だから、$\det(h^{-1})'(y) \neq 0$ $(\forall y \in V)$ であり、$(h^{-1})'(y)$ の最初の k 個の列ベクトルは一次独立である。従って、$(h^{-1})'(u,0)$ $(\forall u \in D)$ の最初の k 個

の列ベクトルからなる (n,k) 行列 $f'(u)$ の階数は k である。h^{-1} が一対一写像だから、f も一対一である。(b) より $h(M\cap U)=V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}^{n-k})$ だから

$$f(D)=h^{-1}(D\times\{0\}^{n-k})=h^{-1}(V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}^{n-k}))=M\cap U.$$

$(a)\implies(b)$ M が (a) を満たすとする。各 $x_0\in M$ に対し x_0 を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と x_0 のまわりの局所パラメタ f が存在して、f の跡が $M\cap U$ となる。f は一対一写像だから、任意の $x\in M\cap U$ に対して、$f(u)=x$ となる $u\in D=D_f$（f の定義域である $\mathbb{R}^k$ の開集合）が唯一つ存在する。特に $f(u_0)=x_0$ とする。定義より $\operatorname{rank} f'(u)=k$ だから、必要ならば座標の番号を取り替え、U を小さく取り直せば

$$\det\left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j}\right)_{1\le i,j\le k}\neq 0\quad(\forall u\in D)$$

と仮定して良い。このとき $g:D\times\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}^n$ を

$$g(u,v)=f(u)+\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}\quad(u\in D,\ v\in\mathbb{R}^{n-k})$$

と定義すると

$$g'(u,v)=\begin{vmatrix}f'(u)&\begin{matrix}0\\ I_{n-k}\end{matrix}\end{vmatrix}=\det\left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j}\right)_{1\le i,j\le k}\neq 0\quad(\forall u\in D)$$

となる。故に、逆関数定理を用いて、$\begin{pmatrix}u_0\\ 0\end{pmatrix}=w_0$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V' と $g(u_0,0)=x_0$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V_2' が存在して、$g_1=g\big|_{V_1'}$ は V_1' から V_2' の上への C^r 級同相写像で、逆写像 $h=g_1^{-1}:V_2'\to V_1'$ も C^r 級である。いま $B=\{f(u)\mid\begin{pmatrix}u\\ 0\end{pmatrix}\in V_1'\}$ とおくとき、$\mathbb{R}^n$ のある開集合 $W\subset U$ が存在して

$$B=W\cap f(D)$$

となる。

> 実際、任意の $x=f(u)\in B$ に対し、u は $\mathbb{R}^k$ の開集合 D の点だから $\epsilon>0$ を小さくとれば、k 次元近傍 $U_k(u,\epsilon)=\{c\in\mathbb{R}^k\mid |c-u|<\epsilon\}$ は D に含まれる。$f(u')=x'$ が $x=f(u)$ に十分近ければ、f^{-1} の連続性から、$u'\in U_k(u,\epsilon)$ となる。また V_1' は開集合で、$\epsilon>0$ を十分近くとるとき $\begin{pmatrix}u'\\ 0\end{pmatrix}\in V_1'$ であるから $x'=f(u')\in B$ となる。そこで各 $x\in B$ に対して $\delta_x>0$ が存在して、$U_n(x,\delta_x)=\{x'\in\mathbb{R}^n\mid |x'-x|<\delta_x\}$ とおくとき
>
> $$U_n(x,\delta_x)\cap f(D)\subset B$$
>
> が成立する。従って、$W=\cup_{x\in B}U_n(x,\delta_x)$ と置くと、W は $\mathbb{R}^n$ の開集合で $B=W\cap f(D)$ を満たす。$f(D)\subset U$ だから、W を $W\cap U$ と取り直して $W\subset U$ となる。

そこで $B=W\cap f(D)$ を満たす W に対し $V_2=V_2'\cap W$、$V_1=g^{-1}(V_2)$ と置く。すると、$V_2=V_2\cap W$、$W\cap U=W$ だから

$$\begin{aligned}V_2\cap M&=V_2\cap W\cap U\cap M=V_2\cap W\cap f(D)=V_2\cap B\\&=\left\{f(u)\in V_2\;\middle|\;\begin{pmatrix}u\\ 0\end{pmatrix}\in V_1'\right\}=\left\{g(u,0)\begin{pmatrix}u\\ 0\end{pmatrix}\in V_1\right\}\end{aligned}$$

となる。故に、

$$h(V_1 \cap M) = g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}\left\{g(u,0)\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1\right\} = \{y \in V_1 \mid y_{k+1} = \cdots = y_n\}$$

となる。従って (V_1, V_2, h) が (b) の (U, V, h) の条件を満たす。 $\square$

系 A.1.1 $\mathbb{R}^n$ の k 次元 C^r 級 $(r \geq 1)$ 多様体 M の各点 x に対し、x を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と $U \cap M$ を跡とする x のまわりの局所パラメタ f であって、以下の条件 *(L)* を満たすものがある：

(L) U から $\mathbb{R}^k$ への C^r 級写像 F があって $F\big|_{M \cap U} = f^{-1}$ となる。

命題 A.1.1 M を $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r 級多様体とする。M の二つの局所パラメタ f, g の跡 $f(D_f) = U \cap M = U_1$ と $g(D_g) = V \cap M = V_1$ が交わるとする。$D_1 = f^{-1}(U \cap V \cap M)$、$D_2 = g{-}1(U \cap V \cap M)$ と置くとき、D_1, D_2 への f, g の制限を f_1, g_1 とすると、k 次元 C^r 級パラメタ付き多様体 f_1 と g_1 は C^r 級同値である。

定義 A.1.4 M が $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r 級多様体、M の一点 p をとり、p のまわりの局所パラメタ f をとり、$f(u) = p$ とする。このとき、$\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^n$ への一次写像 $(df)_u$ による $\mathbb{R}^k$ の像

$$(df)_u(\mathbb{R}^k) = f'(u)\mathbb{R}^k$$

を M の p における接ベクトル空間といい TM_p と表す。TM_p の元を p における M の接ベクトルという。

このとき『$(df)_u$ は $\mathbb{R}^k$ から TM_p への全単射一次写像で、$\dim TM_p = k$ である。』

実際、TM_p の定義より $(df)_u$ は全射である。また $\dim TM_p = \operatorname{rank} f'(u) = k = \dim \mathbb{R}^k$ だから $(df)_u$ は単射である。

$\operatorname{rank} f'(u) = k$ だから TM_p は $\mathbb{R}^n$ の k 次元部分ベクトル空間だる。また別の局所パラメタ g をとると、命題 A.1.1 より $g = f \circ \varphi$、$g'(v) = f'(u)\varphi'(u)$ で $\det \varphi'(u) \neq 0$ だから、$(dg)_v\mathbb{R}^k = (df)_u\mathbb{R}^k$ であり、TM_p は局所パラメタの取り方に依存しない。

例：U が $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f * U \to \mathbb{R}$ が C^1 級関数のとき f のグラフ

$$\Gamma_f = \left\{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x \in U\right\}$$

は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の C^1 級超曲面で、その一点 $p = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ における接超平面は方程式

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で与えられる。

A.2 1 の分割 (partition of unity)

補題 A.2.1 次の性質を満たす実数値関数 g が存在する：

$$(i)\ g \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad (ii)\ 0 \leq g \leq 1,$$
$$(iii)\ g(t) = 1 \Longleftrightarrow t \leq 1, \quad (iv)\ g(t) = 0 \Longleftrightarrow t \geq 4, \quad (v)\ \operatorname{supp}\ g = (-\infty, 4].$$

証明：

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \Longrightarrow g(t) = \frac{f(4-t)}{f(4-t)+f(t-1)}. \qquad \square$$

系 A.2.1 上の g を用いて $f_\delta(x) = g(|x|^2/\delta^2)$ とすると、以下が成立する：

$$(i)\ f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad (ii)\ 0 \leq f_\delta \leq 1,$$
$$(iii)\ f_\delta(t) = 1 \Longleftrightarrow |x| \leq \delta, \quad (iv)\ f_\delta(t) = 0 \Longleftrightarrow |x| \geq 2\delta, \quad (v)\ \mathrm{supp}\ f_\delta = \{x\mathbb{R}^n \mid |x| \leq 2\delta\}.$$

定義 A.2.1 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 A 上の関数 f は、A を含むある開集合上の C^k-級関数 g があって $f = g\big|_A$ となるとき、A 上の C^k-級関数という。

定義 A.2.2 A 上の高々可算個の C^k-級関数の集合 Φ で次の条件 $(i)--(iv)$ を満たすものを A 上の C^k-級の 1 の分割 *(partition of unity)* という：

(i) 各 $\varphi \in \Phi$ は $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ $(\forall x \in A)$ を満たす。

(ii) 各 $x \in A$ に対し、x の開近傍 $V(x)$ が存在して、有限個のものを除いた全ての $\varphi \in \Phi$ は $V(x)$ 上で 0 に等しい。特に、各 $x \in A$ に対し $\varphi(x) \neq 0$ となる $\varphi \in \Phi$ は有限個である。

(iii) $x \in A$ に対し、$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ である。

(iv) 各 $\varphi \in \Phi$ に対しその台 $\mathrm{supp}\,\varphi$ はコンパクトな体積確定集合である。

更に、Φ が A の開被覆 $\mathcal{U} = \{U\}$ に対して次の条件を満たすとき、Φ は $\mathcal{U}$ に属するという：

(v) 各 $\varphi \in \Phi$ に対し、ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $\mathrm{supp}\ \varphi \subset U$ となる。

注意：これをどう使うと局所から大域になるのかは、各自で調べられたし。