1次元 HK(alias 一般化 Riemann) 積分入門

東工大数学科平成 17 年度解析概論第二での試み
新しい理論体系への早い時期での接触

井上淳

平成 18 年 1 月 15 日

目 次

序：何故、今さら積分論なのか？[1]

Lebesgue の各種収束定理の条件をおまじないとして唱えると、あら不思議[2]、極限操作と積分操作が入れ替えられる。この条件の check が Riemann 積分のそれと比較して容易なので、Lebesgue 積分は Riemann 積分の上位概念であると思い込まされ、実際思い込んでもきた[3]。Lebesgue 積分に基礎をおいた確率論や関数解析的方法による偏微分方程式の研究の発展も、この思い込みに疑いを差し挟むことを躊躇させた。

ところが、Lebesgue 積分論は「究極の積分論なのか？」[4] という素朴な疑問を持った人々が古くからあり、それが例えば、Perron-Denjoy 達だった。彼等は Lebesgue 積分論を精密化することで「究極の積分論？」を得たはずなのだが、議論が煩雑なので理論自体はほとんど打ち捨てられていた。1950 年代後半になって、Kurzweil と Henstock が独立に、

Riemann 積分論をちょっと「柔らかくした」積分論[5]

を展開し、これが実は Perron-Denjoy 積分と同値であることが後になって示された[6]。この小論はその理論を紹介し、特に “測度論無し”での「新しい装いの 1 次元版積分」の効用を述べてみたい。多次元の場合は別に述べることにするが、多次元での発散定理と Fubini の定理を共に究極的に整備することはできない[7]、ということは注目に値する。

1 HK 積分の定義

1.1 区間分割とゲージ

定義 1.1.1 φ を $S \subset \mathbb{R}$ 上の増加関数とする。S の任意の部分区間 $B = [c,d] (c < d)$ に対し、非負な数 $\varphi(B) = \varphi([c,d]) = \varphi(d) - \varphi(c)$ を B の **φ-長さ**という。特に、$\varphi = \lambda$、 即ち $\lambda(x) = x$ のとき、$\mathbb{R}$ での **Lebesgue 長さ**という。

[1] 著者が工夫したのは「テニヲハ」だけ！
[2] 囲碁・将棋・麻雀では「手順前後は大違い」というが、 2つの極限操作が入れ替えられないかもしれないという疑いは通常の感覚か？
[3] 一方で、「絶対収束級数ならば足し算の順序をどう変えてもよいが、条件収束だとそうはいかない」と 1 年生に教えてきた。となると、絶対積分可能と条件積分可能の概念を知りながら、Lebesgue 積分が一途に「上位概念と思い込み」疑わなかったのだから、恥ずかしい！
[4] Pfeffer による表現では、“If we can calculate the value of an integral of a function, then such a function ought to be integrable”
[5] 関数の Riemann 積分可能性、「任意の $\epsilon > 0$ に対してある「定数」$\delta > 0$ があって $\cdots$」を、「ある「正の関数」$\delta(x) > 0$ があって $\cdots$」と変えるだけ！とは言っても、正定数と正関数とでは「選択度」が大いに違う！
[6] 例えば、P-Y. Lee [4] に説明がある
[7] The ability to integrate the divergence of an arbitrary differentiable vector field is incompatible with the Fubini theorem, pp.208-209 of Pfeffer [7]。条件収束する 2 重級数の和の順序変更は厄介な代物だが、Lebesgue 積分は絶対収束するものを扱っている！

定義 1.1.2 $I_1, \cdots, I_p$ が非重複[8]な閉区間で、点 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ が $\mathbb{R}$ に属するとき、集まり

$$\mathcal{P} = \{(I_1, \xi_1), (I_2, \xi_2), \cdots, (I_p, \xi_p)\} \quad （必ずしも\ \xi_i \in I_i\ を仮定していない！）$$

を、**Lebesgue 仕切り**或いは単に**仕切り（partition）**という。特に、任意の $i \in \{1, \cdots, p\}$ に対し $\xi_i \in I_i$ なるとき $\mathcal{P}$ を **Perron 仕切り**或いは **P-仕切り**[9]といい、$\dot{\mathcal{P}}$ とも書く。

定義 1.1.3 $E \subset \mathbb{R}$ 上で定義された正の関数 δ をとる。$\{\xi_1, \cdots, \xi_p\} \subset E$ なる仕切り $\{(I_1, \xi_1), \cdots, (I_p, \xi_p)\}$ が **δ-細** (δ-*fine*) とは、任意の $i \in \{1, \cdots, p\}$ に対し $I_i \subset U(\xi_i, \delta(\xi_i))$、即ち

$$I_i = [a_i, b_i] \Longrightarrow \xi_i - \delta(\xi_i) < a_i < b_i < \xi_i + \delta(\xi_i) \tag{1}$$

となることである[10]。特に、$\underline{\delta\text{-細}\ P\text{-仕切りを}\ \dot{\mathcal{P}} \ll \delta\ \text{と表記}}$ する。$\{(I_1, \xi_1), \cdots, (I_p, \xi_p)\}$ を仕切り、I を閉区間とする。$\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ と $\cup_{i=1}^p I_i$ とが I の部分集合のとき、$\mathcal{P}$ を I の**中の**仕切り、特に $I = \cup_{i=1}^p I_i$ のとき $\mathcal{P}$ を I **の**仕切りと呼ぶ。

命題 1.1.1 (Cousin の補題) 閉区間 I 上の任意の正関数 δ（ゲージと呼ぶ）に対し δ-細なる I の *Perron* 仕切りが存在する。

証明：$I = [a, b]$ とし $c \in (a, b)$ とする。$\mathcal{P}_a$ と $\mathcal{P}_b$ を、それぞれ $[a, c]$ と $[c, b]$ の δ-細 P-仕切りとすると、$\mathcal{P} = \mathcal{P}_a \cup \mathcal{P}_b$ は I の δ-細 P-仕切りとなる。これに注意し、補題の主張を背理法で証明する。

補題が偽として、セルを 2 等分するとこの証明の最初に述べた注意より、少なくとも片方には δ-細 P-仕切りが存在しない。そこで、セルを以下を満たすように帰納的に作る。

$$I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

であって、$n = 0, 1, \cdots$ に対して I_n には δ-細 P-仕切りが存在せず、その長さが $\lambda(I_n) = (b - a)2^{-n}$ を満たす。区間縮小法で $\cap_{n=0}^\infty I_n = \{z\}$ なる $z \in I$ が存在する。$\delta(z) > 0$ だから整数 $k \geq 0$ があって $\lambda(I_k) < \delta(z)$ となる。故に、$\{(I_k, z)\}$ は I_k の δ-細 P-仕切りであり、背理法の仮定から導かれた「I_k には δ-細 P-仕切りが存在せず」に矛盾する。　□

別証：集合を $C = \{c \in I \mid 区間\ [a, c]\ には\ \delta\text{-細仕切りがある}\ \}$ と定める。x を $x \in (a, a + \delta(a)]$ かつ $x \leq b$ をなるようにとると、$([a, x], a)$ は $[a, x]$ の δ-細仕切りを与える。これより集合 C は空でないこと、及び b が C の上界であることが分る。

$s = \sup C$ と定める時、$s \in C$ なることを示す。$s - \delta(s) < s = \sup C$ だから $s - \delta(s) < v < s$ なる $v \in C$ がある。$\dot{\mathcal{P}}_1$ を $[a, v]$ の δ-細仕切りとし $\dot{\mathcal{P}}_2 = \dot{\mathcal{P}}_1 \cup ([v, s], s)$ とおくと、$\dot{\mathcal{P}}_2$ は $[a, s]$ の δ-細仕切りとなっているから $s \in C$ である。

$s \leq b$ は分かっている。$s < b$ とすると、$w \in [a, b]$ で $s < w < s + \delta(s)$ なるものがある。$\dot{\mathcal{Q}}_1$ を $[a, s]$ の δ-細仕切りとし $\dot{\mathcal{Q}}_2 = \dot{\mathcal{Q}}_1 \cup ([s, w], s)$ とすると、$\dot{\mathcal{Q}}_2$ は $[a, w]$ の δ-細仕切りとなっているから $w \in C$ となる。しかしこれは $s = \sup C$ という上限の定義に矛盾するから、$s = b$ である。　□

系 1.1.1 セル I 上の正関数 δ をとる。I **の中の**任意の δ-細仕切り $\mathcal{P}$ は I **の** δ-細仕切り $\mathcal{Q}$ があって、それの部分集合とできる。ここで、$\mathcal{P}$ が *Perron* ならば $\mathcal{Q}$ も *Perron* ととれる。

[8] 相異なる 2 つの区間 I_i, I_j の共通部分が内点を含まない

[9] called a tagged partition by Bartle、目印付仕切り

[10] この場合でも $\xi_i \in I_i$ とは限らない、即ち、P-仕切りとは限らない

証明：$\mathcal{P}=\{(I_k,\xi_k)\}_{k=1}^p$ とセル $J_1,\cdots,J_q$ があって、$\{I_1,\cdots,I_p,J_1,\cdots,J_q\}$ は非重複なセルで

$$I=\left(\cup_{k=1}^p I_k\right)\cup\left(\cup_{\ell=1}^q J_\ell\right)$$

なるものとする。上の補題から J_ℓ の δ-細 P-仕切り $\mathcal{P}_\ell$ がある。故に、I の δ-細 P-仕切り $\mathcal{Q}$ を

$$\mathcal{Q}=\mathcal{P}\cup\left(\cup_{\ell=1}^q \mathcal{P}_\ell\right)$$

とすれば良い。　　□ 例 a：$\delta>0$ を定数とし、定数関数 $\delta(t)\equiv\delta: I\ni t\to\mathbb{R}$ を定数ゲージと言う。目印付き仕切り $\dot{\mathcal{P}}=\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ が δ-細なるための必要十分条件は

$$I_i\subset[\xi_i-\delta,\xi_i+\delta]=B(\xi_i;\delta)$$

であり、このとき $\ell(I_i)=|I_i|\le 2\delta$ である。

例 b：δ_1 と δ_2 を $I=[a,b]$ 上のゲージとし、$\delta(t)=\min\{\delta_1(t),\delta_2(t)\}$ と定める。I 上の δ-細ゲージは δ_1-細かつ δ_2-細ゲージである。

例 c：与えられた点を目印点に強制するゲージの取り方ができる。例えば、

$$I=[0,1],\qquad \delta(t)=\begin{cases}1/4 & \{t=0\},\\ t/2 & \{0<t\le 1\}\end{cases}$$

とし、$\dot{\mathcal{P}}$ を I の $\delta(\cdot)$-細仕切りとする。$0\in I$ だから 0 はある部分区間 $I_1=[0,x_1]$ に入る。このとき、I_1 の目印点 ξ_1 は 0 とならざるを得ない。実際、$\dot{\mathcal{P}}$ は δ-細なのだから、$[0,x_1]\subset[\xi_1-\delta(\xi_1),\xi_1+\delta(\xi_1)]$、即ち $\xi_1-\delta(\xi_1)\le 0$[11]でなければならない。ところで、$\xi_1>0$ とすると $\delta(\xi_1)=\xi_1/2$ であり $\xi_1-\delta(\xi_1)=\xi_1-\xi_1/2>0$ だから、上に述べた δ-細の条件に反する。故に目印点 ξ_1 は 0 でなければならない。

例 d：$a<c<b$ とする。
(i) δ を $[a,b]$ 上のゲージとする。$\dot{\mathcal{P}}'$ を $[a,c]$ の δ-細仕切り、$\dot{\mathcal{P}}''$ を $[c,b]$ の δ-細仕切りとすると $\dot{\mathcal{P}}'\cup\dot{\mathcal{P}}''$ は $[a,b]$ の δ-細仕切りである。
(ii) δ' と δ'' をそれぞれ $[a,c]$ と $[c,b]$ のゲージとする。

$$\delta(t)=\begin{cases}\delta'(t) & t\in[a,c),\\ \min\{\delta'(c),\delta''(c)\} & t=c,\\ \delta''(t) & t\in(c,b],\end{cases}$$

と定めると δ は $[a,b]$ 上のゲージとなる。$\dot{\mathcal{P}}'$ を $[a,c]$ の δ'-細仕切り、$\dot{\mathcal{P}}''$ を $[c,b]$ の δ''-細仕切りとするとき $\dot{\mathcal{P}}'\cup\dot{\mathcal{P}}''$ は c を仕切り点の一つとする $[a,b]$ の仕切りにはなるが、必ずしも δ-細仕切りとはならない。
(iii) δ' と δ'' を (ii) のようにとり

$$\delta^*(t)=\begin{cases}\min\{\delta'(t),(c-t)/2\} & t\in[a,c),\\ \min\{\delta'(c),\delta''(c)\} & t=c,\\ \min\{\delta''(t),(t-c)/2\} & t\in(c,b],\end{cases}$$

と定めると $\delta^*(\cdot)$ は $[a,b]$ 上のゲージとなる。任意の δ^*-細仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ をとると、c を含む $\dot{\mathcal{P}}$ の部分区間は c を目印点とせざるを得ない。上のように定めた $[a,b]$ 上の任意の δ^*-細仕切りは、$[a,c]$ の δ'-細仕切りを、$[c,b]$ は δ''-細仕切りを与える。

[11] ここでは必要ないが $x_1\le\xi_1+\delta(\xi_1)$

レポート問題 1：上の例 d(ii) の「$\dot{\mathcal{P}}' \cup \dot{\mathcal{P}}''$ は c を仕切り点の一つとする $[a,b]$ の仕切りにはなるが、必ずしも δ-細仕切りとはならない」を示せ。

オマケ：「仕切り」に慣れるために、以下の例も示すと良い：

(Q-1) $[0,1]$ 上で

$$\delta(t) = \begin{cases} 1/4 & t = 0, \\ \mathrm{dist}\,(t, \{0,1\})/2 & t \in (0,1), \\ 1/4 & t = 1 \end{cases}$$

を考える。$[0,1]$ の任意の δ-細仕切りは 0 と 1 を目印点とすることを示せ。

(Q-2) 開区間 $J_k = (a_k, b_k)(k = 1, 2, \cdots, m)$ が $I \subset \cup_{k=1}^{m} J_k$ となるものとする。I の仕切り $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ で、各閉区間 I_i が開区間 J_k のどれかに含まれるものが存在する事を示せ。

1.2 Riemann-Stieltjes 和と HK-積分可能の定義

定義 1.2.1 (Riemann-Stieltjes 和) 閉区間 I 上の増加関数 φ と I の中の仕切り $\mathcal{P} = \{(I_1, \xi_1), \cdots, (I_p, \xi_p)\}$ をとる。$\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$ 上の任意の関数 f に対し、

$$\sigma(f, I; \varphi) = \sigma_{\mathcal{P}}(f, I; \varphi) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\varphi(I_i)$$

とおき、この数を $\mathcal{P}$ に随伴した f の **φ-Riemann-Stieltjes 和**, 或いは単に **Riemann-Stieltjes 和**と呼ぶ[12]。閉区間 I を略して単に $\sigma(f; \varphi)$, $\sigma_{\mathcal{P}}(f; \varphi)$ とも記す。

以下では、$\varphi(x) = x$ のとき $\varphi(I_i) = |I_i|$ とし

$$\sigma(f, I) = \sigma_{\mathcal{P}}(f, I) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)|I_i|$$

と略記する。

定義 1.2.2 φ を閉区間 I 上増加関数とする。I 上の関数 f が I で **HK-積分可能** (Henstock-Kurzweil integrable) 或いは **gR-積分可能** (generalized Riemann integrable) であるとは、実数 A があって、任意の $\epsilon > 0$ に対し I 上の正関数 δ をうまくとると、I の任意の δ-細 P-仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ に対し

$$|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f, I; \varphi) - A| < \epsilon$$

となることをいう。このとき、$\int_I f\, d\varphi = A$ と書く。また、I 上の *HK*-積分可能な関数全体を $\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I, \varphi)$ と記す。特に、$\varphi(x) = \lambda(x) = x$ のときは、単に $\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ と記す。

例（1875, K.J. Thomae）：$I = [0,1]$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ q, & x = p/q \,(\text{既約分数で } q > 0) \in I \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

は到る所不連続で $I = [0,1]$ のどんな部分区間上でも有界でないから、R-可積分ではない。しかし、$I = [0,1]$ 上で HK-積分可能である。

[12] φ-RS 和とか RS 和とも書く、$\varphi(x) = x$ のときは単に R 和という

レポート問題 2：上の関数 f が到る所不連続で $I=[0,1]$ のどんな部分区間上でも有界でないこと、また、（improper）R-可積分ではないことを示せ。

上の関数 f は $I=[0,1]$ 上で HK-積分可能なることの証明：

さて、$[0,1]$ 内の有理数を $\{r_k = p_k/q_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ と数え上げる。任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\delta_\epsilon(\xi) = \begin{cases} \epsilon/(q_k 2^{k+1}) & \text{if } \xi = p_k/q_k, \\ 1 & \text{if } \xi \in (\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) \cup \{0\} \end{cases}$$

と定める。$\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, \xi_i)\}$ を $[0,1]$ 上の任意の δ_ϵ-細仕切りとする。

目印点 $\xi_i \in I_i$ が無理数ならば $f(\xi_i)=0$ だから、そのような目印点を持つ分割からの Riemann 和への寄与は 0 である。もし目印点 $\xi_i \in I_i$ が有理数 $\xi_i = p_k/q_k$ ならば、δ_ϵ-細仕切りなのだから、$I_i \subset [r_k - \delta_\epsilon(r_k), r_k + \delta_\epsilon(r_k)]$、即ち $|I_i| \le 2\delta_\epsilon(r_k) = 2\epsilon/(q_k 2^{k+1})$ となる。もし r_k が $\dot{\mathcal{P}}$ の相続く分割の目印点ならば、この二つの重なり合わない被覆の長さは $\epsilon/(q_k 2^{k+1})$ 以下となるから、

$$|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f, I)| \le \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\epsilon}{q_k 2^{k+1}} \le \epsilon.$$

故に、f は HK-積分可能で $\int_0^1 f = 0$ となる。 □

レポート問題 $2'$：上の関数と似ているが異なる関数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ q^{-1}, & x = p/q \ (\text{既約分数で } q > 0) \in I \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

について、(i)g は有理点では不連続であり、(ii) g は無理点 x で連続となる、事を示せ。

問題 (再掲)：Dirichlet 関数 (1829, P.G.L. Dirichlet) $\chi_{\mathbb{Q}}$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

は $[0,1]$ 上任意の点で不連続で、R-可積分ではない。しかし、HK-可積分であることを示せ。（R-可積分ではないを (i) Lebesgue の特徴付けを用いるか、 (ii) Darboux の上積分と下積分を用いて示せ。HK-可積分なることは、上の説明をもじれ！）

証明：(非 R-可積分性)：(i) Lebesgue の R-可積分関数の特徴付けを用いる方法。$\chi_{\mathbb{Q}}$ は至る所不連続だから、$D = \{x \mid o(\chi_{\mathbb{Q}}, x) \neq 0\}$ とすると $D = [0,1]$ である。故に、$\chi_{\mathbb{Q}}$ は R-可積分ではない。
(ii) Darboux の上積分値と下積分値とが異なること。
(HK-可積分性)：$[0,1]$ 内の有理数を $\{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ と数え上げる。任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\delta_\epsilon(\xi) = \begin{cases} \epsilon/2^{k+1} & \text{if } \xi = r_k, \\ 1 & \text{if } \xi \in (\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) \cup \{0\} \end{cases}$$

と定める。$\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, \xi_i)\}$ を $[0,1]$ 上の任意の δ_ϵ-細仕切りとする。

目印点 $\xi_i \in I_i$ が無理数ならば $f(\xi_i)=0$ だから、そのような目印点を持つ分割からの Riemann 和への寄与は 0 である。もし目印点 $\xi_i \in I_i$ が有理数 $\xi_i = r_k$ ならば、δ_ϵ-細仕切りなのだから、$I_i \subset [r_k - \delta_\epsilon(r_k), r_k + \delta_\epsilon(r_k)]$、即ち $|I_i| \le 2\delta_\epsilon(r_k) = 2\epsilon/2^k$ となる。もし r_k が $\dot{\mathcal{P}}$ の相続く分割の目印点ならば、それは端点にあり、この二つ

の重なり合わない被覆の長さは $\epsilon/2^k$ 以下となるから、

$$|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,I)| \leq \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\epsilon}{2^k} \leq \epsilon.$$

故に、f は HK-積分可能で $\int_0^1 f = 0$ となる。 □

積分値 A が与えられていない場合の HK-積分可能性の判定条件は以下に与えられるが、考え方は数列の収束条件と対比するとわかりやすい[13]：

定理 1.2.1 φ を有界閉区間 $I=[a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ 上の増加関数とする。$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ なる必要十分条件は、任意の $\epsilon > 0$ に対し正関数 $\delta(\xi)$ があって、どんな δ-細 P 仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ 及び $\dot{\mathcal{Q}}$ をとっても

$$\left|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f;\varphi) - \sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f;\varphi)\right| < \epsilon$$

となることである。

証明：$\Longrightarrow$): 明らか。
$\Longleftarrow$): 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $I=[a,b]$ 上の正関数 δ_n をとって、$\dot{\mathcal{P}}$ 及び $\dot{\mathcal{Q}}$ が δ_n-細 P 仕切りならば、

$$\left|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f;\varphi) - \sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f;\varphi)\right| < 1/n$$

とできる。特に、任意の $t \in I$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し $\delta_n(t) \geq \delta_{n+1}(t)$ と仮定して一般性を失わない[14]。

各 n に対し $\dot{\mathcal{P}}_n$ を δ_n-細仕切りとする。$m > n$ とすると、$\dot{\mathcal{P}}_m$ と $\dot{\mathcal{P}}_n$ は共に δ_n-細仕切りであり、仮定から $m > n$ のとき

$$\left|\sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_n;\varphi) - \sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_m;\varphi)\right| \leq \frac{1}{n}$$

を満たす。故に、$\{\sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_n;\varphi)\}$ は $\mathbb{R}$ で基本列をなすからその極限を $A = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_n;\varphi)$ と記す。$m \to \infty$ として、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$\left|\sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_n;\varphi) - A\right| \leq \frac{1}{n}.$$

このとき $\epsilon > 0$ に対して $K \in \mathbb{N}$ を $K > 2/\epsilon$ なるようにとると、任意の δ_K-細仕切り $\dot{\mathcal{Q}}$ に対し

$$\left|\sigma(f,\dot{\mathcal{Q}};\varphi) - A\right| \leq \left|\sigma(f,\dot{\mathcal{Q}};\varphi) - \sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_n;\varphi)\right| + \left|\sigma(f,\dot{\mathcal{P}}_n;\varphi) - A\right| \leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \epsilon.$$

故に、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I,\varphi)$ となる。 □

$\Longleftarrow$) の別証明: 任意の $\epsilon > 0$ に対し $I=[a,b]$ 上の正関数 δ をとって、$\dot{\mathcal{P}} = \{(B_j,\xi_j)\}$ と $\dot{\mathcal{Q}} = \{(C_k,\eta_k)\}$ を δ-細仕切りとする。$j=1,\cdots,p$ 及び $k=1,\cdots,q$ に対し

$$I_{i,j} = B_i \cap C_j, \quad x_{i,j} = \xi_i,\ y_{i,j} = \eta_j$$

とおき、

$$N = \{(i,j) \mid (I_{i,j})^\circ \neq \emptyset\}$$

と定める。このとき

$$\dot{\mathcal{R}} = \{(I_{i,j},x_{i,j}) \mid (i,j) \in N\}, \quad \dot{\mathcal{S}} = \{(I_{i,j},y_{i,j}) \mid (i,j) \in N\}$$

[13] 数列が Cauchy 列をなすとき、その数列の収束先をどう決めたか思い出そう
[14] 必要ならば、$\delta'_n(t) = \min\{\delta_1(t),\cdots,\delta_n(t)\}$ と取り直せば $\delta'_n(t) \geq \delta'_{n+1}(t)$ となる

は I の δ-細仕切りとなる。故に

$$\sigma_{\dot{\mathcal{R}}}(f,I;\varphi)=\sum_{(i,j)\in N}f(x_{i,j})\varphi(I_{i,j})=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}f(x_{i,j})\varphi(I_{i,j})$$
$$=\sum_{i=1}^{p}f(\xi_i)\sum_{j=1}^{q}\varphi(B_i\cap C_j)=\sum_{i=1}^{p}f(\xi_i)\varphi(B_i)=\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,I;\varphi)$$

となる。同様に $\sigma_{\dot{\mathcal{S}}}(f,I;\varphi)=\sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f,I;\varphi)$ だから

$$|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,I;\varphi)-\sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f,I;\varphi)|=|\sigma_{\dot{\mathcal{R}}}(f,I;\varphi)-\sigma_{\dot{\mathcal{S}}}(f,I;\varphi)|<\epsilon$$

となるから $\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,I;\varphi)$ は Cauchy 列で $f\in\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I;\varphi)$ となる。 □

系 1.2.1 φ を有界閉区間 $I=[a,b]$ $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$ 上の増加関数とする。有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数 f は *HK*-積分可能、$f\in\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I;\varphi)$ である。

証明：有界閉区間上の連続関数の一様連続性より、任意の $\epsilon>0$ に対して、ある $\Delta>0$ があって、任意の $x,y\in I$ に対し $|x-y|<2\Delta$ ならば

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{\varphi(I)+1}$$

となる。そこで任意の $x\in I$ に対して $\delta(x)=\Delta$ とおき $\{(I_1,\xi_1),\cdots,(I_n,\xi_n)\}$ と $\{(I_1,\eta_1),\cdots,(I_n,\eta_n)\}$ を δ-細仕切りとする。すると

$$I_i\subset U(\xi_i,\Delta)\cap U(\eta_i,\Delta)$$

だから、$i=1,\cdots,n$ に対し $|\xi_i-\eta_i|<2\Delta$ となり、

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\varphi(I_i)\leq\frac{\epsilon}{\varphi(I)+1}\sum_{i=1}^{n}\varphi(I_i)\leq\epsilon\frac{\varphi(I)}{\varphi(I)+1}<\epsilon. \qquad \square$$

レポート問題 4：この系の証明を定理 1.2.1 を用いずに、直接与えよ。（ヒント：上の定理と同様に推論せよ。ポイントは、R-積分のときは f の一様連続性をまず示したのだが、それを要しないことである。）

2 無限遠点、特異点の扱いについて

定義 2.0.3 $\mathbb{R}$ 上の正の関数 $\delta(x)$ に対して

$$\bar{\delta}(x)=\begin{cases}A>0 & x=-\infty,\\ \delta(x) & -\infty<x<+\infty,\\ B>0 & x=+\infty\end{cases}$$

と定め、$\bar{\delta}$ を拡大実数 $\bar{\mathbb{R}}$ 上のゲージと言う。$\bar{\mathbb{R}}$ の仕切り

$$-\infty<a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b<+\infty \quad と \quad \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$$

が $\bar{\delta}$-細仕切りであるとは、

$$a<-A=\bar{\delta}(-\infty),\ b>B=\bar{\delta}(+\infty) \quad かつ \quad \xi_i-\bar{\delta}(\xi_i)<x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i<\xi_i+\bar{\delta}(\xi_i)$$

となることである。

注意：$\bar{\mathbb{R}}$ 上のゲージ $\bar{\delta}$、

$$\begin{cases} B[x;r]=[x-r,x+r] & x\in\mathbb{R}, r>0, \\ B[\infty;r]=[1/r,\infty] & , \\ B[-\infty;r]=[-\infty,-1/r] \end{cases}$$

と定めるとき、目印付き仕切り

$$\dot{\mathcal{P}}=\{([x_0,x_1],\xi_1),\cdots,([x_{n-1},x_n],\xi_n),([x_n,x_{n+1}],\xi_{n+1})\}$$

が $\bar{\delta}$-細であるとは

$$[x_{i-1},x_i]\subset B[\xi_i,\bar{\delta}(\xi_i)] \quad (i=1,\cdots,n+1).$$

2.1 無限遠点の処理例

$f(x)=x^{-2}$ を $[1,\infty)$ 上で考える。任意の $\epsilon>0$ に対し $[1,\infty]$ 上の正関数を

$$\bar{\delta}_\epsilon(\xi)=\begin{cases} \epsilon\xi & \text{when } 1\le\xi<\infty, \\ 1/\epsilon & \text{when } \xi=\infty, \end{cases}$$

と定める。$x_0=1$、$x_n>1/\epsilon$ として $[1,\infty]$ 上での $\bar{\delta}_\epsilon$-細仕切りをとる。即ち、

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-1\Big| &\le \left|\sum_{i=1}^n \frac{x_i-x_{i-1}}{\xi_i^2}-\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)\right|+\frac{1}{x_n} \\ &\le \sum_{i=1}^n\left|\frac{x_ix_{i-1}}{\xi_i^2}-1\right|\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)+\epsilon \end{aligned}$$

となる。x_ix_{i-1}/ξ_i^2-1 が正の場合、負の場合とを分けると

$$\begin{aligned} x_ix_{i-1}<\xi_i^2 &\Longrightarrow \frac{x_ix_{i-1}-\xi_i^2}{\xi_i^2}\le\frac{x_ix_{i-1}-x_{i-1}^2}{\xi_i^2}\le\frac{x_i-x_{i-1}}{\xi_i} \qquad (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i) \\ x_ix_{i-1}>\xi_i^2 &\Longrightarrow \frac{\xi_i^2-x_ix_{i-1}}{\xi_i^2}\le\frac{x_i^2-x_ix_{i-1}}{\xi_ix_{i-1}}\le\frac{x_i-x_{i-1}}{\xi_i} \qquad (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i) \end{aligned}$$

となるから

$$\left|\frac{x_ix_{i-1}}{\xi_i^2}-1\right|\le\frac{x_i-x_{i-1}}{\xi_i}<\frac{2\delta(\xi_i)}{\xi_i}<2\epsilon$$

で、

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-1\Big|<2\epsilon\left(1-\frac{1}{x_n}\right)+\epsilon$$

となる。故に、f は $[1,\infty]$ 上で HK-積分可能で、$\int_1^\infty f=1$。 □

注意：有界な部分でも、$\bar{\delta}_\epsilon$-細仕切りのすべての仕切り幅が $\epsilon>0$ に応じて短くなるとは限らない。実際、この例の場合、n を $(1+\epsilon/5)^{n-1}>2/\epsilon$ を満たすように取り、$k=0,1,\cdots,n-1$ に対して $x_k=(1+\epsilon/5)^k$ そして $x_n>1/\epsilon$ ととる。$k=1,\cdots,n-1$ に対して $\xi_k=x_{k-1}$ かつ $\xi_n=\infty$ とすると、これは $[1,\infty]$ の $\bar{\delta}_\epsilon$-細仕切りを与える。しかし、n の取り方から、どんな小さな $\epsilon>0$ をとっても $x_{n-1}-x_{n-2}\ge 1/3$ となっている。

別説明 1

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}x^{-2} & \text{for } x\in[1,\infty),\\ 0 & \text{for } x=\infty,\end{cases}\quad \bar{F}(x)=\begin{cases}-x^{-1} & \text{for } x\in[1,\infty),\\ 0 & \text{for } x=\infty,\end{cases}\quad \bar{\delta}_{\epsilon,B}(\xi)=\epsilon\ (\xi\in[1,\infty]).$$

規約 $0{\cdot}\infty=0$ より、$\bar{f}(\infty)\big|[x_n,\infty]\big|=0$ となるから

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,[1,\infty])-\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\xi_i^2}-\left(-\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{i-1}}\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\xi_i^2}-\frac{1}{x_ix_{i-1}}\right)(x_i-x_{i-1}).\end{aligned}$$

仕切りと目印点 $1\le x_i\le\xi_i\le x_i$ に対し $x_i-x_{i-1}\le 2\delta_\epsilon(\xi_i)=2\epsilon\ (n=1,2,\cdots,n)$ だから

$$\left|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,[1,\infty])-\left(1-\frac{1}{x_n}\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)2\epsilon=\left(1-\frac{1}{x_n}\right)2\epsilon<2\epsilon.$$

$\mathcal{P}$ は $\bar{\delta}_\epsilon$-細だから、$1/x_n\le\epsilon$ であり

$$\big|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f,[1,\infty])-1\big|\le 3\epsilon.\qquad\square$$

別説明 2　非有界部分区間 $[-\infty,a]$ 或いは $[a,\infty]$ に対しては、その長さを 0 と宣言する方法もある。実際、$f(\infty)$ を任意の有限な値と決め、開集合値関数 $V(z)=(z-\epsilon z/4,z+\epsilon z/4)(1\le z<\infty)$ また $V(\infty)=(2/\epsilon,\infty]$ とする。$z<\infty$ に対し $z\in[u,v]$ かつ $[u,v]\subset V(z)$ とすると

$$\left|-\frac{1}{v}+\frac{1}{u}-\frac{1}{z^2}(v-u)\right|\le\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right).$$

$[t,\infty]\subset V(\infty)$ ならば $|[t,\infty]|=0$ と見なして[15]、

$$\left|\frac{1}{t}-f(\infty)|[t,\infty]|\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

さて $\mathcal{D}$ を V-細とする。$z=\infty$ のときのみ $\infty\in V(\infty)$ だから、例えば無限区間 $[t,\infty]$ は ∞ を目印をもち、$[t,\infty]\subset V(\infty)$ である。

（注）$1\le z<\infty$ に対して $\bar{\delta}_{\epsilon,M}(z)=\epsilon z/4$、$\bar{\delta}_{\epsilon,M}(\infty)=2/\epsilon$ と定めると、$V(z)=U(z,\bar{\delta}_{\epsilon,M}(z)),\ V(\infty)=(2/\epsilon,\infty]$ となっている。

2.2 特異点の処理例１ [刺を持つ関数]

関数を

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{if } 0<x\le 1,\\ 3 & \text{if } x=0,\end{cases}\qquad \text{とすると}\qquad \int_0^1 f=2(=\lim_{\epsilon\to 0}2x\big|_{x=\epsilon}^{1}).$$

証明[16]：任意の $\epsilon>0$ に対して、正関数を

$$\delta_{1,\epsilon}(\xi)=\epsilon\quad(\xi\in[0,1]),\quad \delta_{2,\epsilon}(\xi)=\begin{cases}\epsilon & \text{for } \xi=0,\\ \xi/2 & \text{for } 0<\xi\le 1,\end{cases}\qquad \text{或いは}\quad \delta_{3,\epsilon}(\xi)=\begin{cases}\epsilon & \text{for } \xi=0,\\ 1 & \text{for } 0<\xi\le 1,\end{cases}$$

[15] この無限区間の長さは 0 と見なすという規約は少々引っ掛かるが

[16] 以下では最初の版と随分記述が変わっている。これは行司君の質問による！即ち行司君が疑問を持ったのは正しく、私は間違った理由付けをしていた

と定めると、任意の $\delta_{j,\epsilon}$-細仕切り $\dot{\mathcal{P}}_j$ に対し

$$\left|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}_j}(f,[0,1])-2\right|<\epsilon \qquad (j=1,2)$$

となる事を示す。

例えば、整数 n があって分点（仕切り点）と目印点を

$$0=x_0,\ \xi_j-\delta_{k,\epsilon}(\xi_j)\le x_{j-1}\le \xi_j\le x_j\le \xi_j+\delta_{k,\epsilon}(\xi_j)\ (j=1,\cdots,n-1),\ x_n=1$$

となるようにとれば、$\delta_{k,\epsilon}$-細仕切りとなる。

(i) $\delta_{1,\epsilon}$-細仕切りとすると、

$$\xi_1-\epsilon<0=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_1+\epsilon,\quad \xi_2-\epsilon\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_2+\epsilon,\qquad \mathrm{etc},$$

であり $x_j-x_{j-1}\le 2\epsilon$ だから、最小の分割数 n は $[1/\epsilon]+1$ 程度である。

このとき

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})=\begin{cases}3(x_1-x_0)+2(x_n-x_1)=2(x_n-x_0)+(x_1-x_0) & \text{if } \xi_1=0,\\ 2(x_n-x_0) & \text{if } \xi_1>0,\end{cases}$$

で、

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})-2\Big|=\begin{cases}x_1 & \text{if } \xi_1=0\\ 0 & \text{if } \xi_1>0\end{cases}$$

となる。$\xi_1-\epsilon<0=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_1+\epsilon$ から $0\le x_1\le 2\epsilon$ となるから、$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})-2\right|\le 2\epsilon$ となる。

(ii) 同様に $\delta_{2,\epsilon}$-細仕切りは、

$$\dot{\mathcal{P}}_2=\{([0,x_1],\xi_1),([x_1,x_2],\xi_2),\cdots,([x_{n-1},x_n],\xi_n)\},$$

$$\xi_1-\delta_{2,\epsilon}(\xi_1)\le 0=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_1+\delta_{2,\epsilon}(\xi_1),\quad \xi_j/2\le x_{j-1}\le\xi_j\le x_j\le 3\xi_j/2,\ (j=2,\cdots,n).$$

ところで、$\xi_1>0$ ならば $\xi_1/2\le 0=x_0$ となるから、$\xi_1=0$ でなければならない。故に $x_1\le\epsilon$ であり、

$$\sigma_{\dot{\mathcal{P}}_2}(f,[0,1])-2=f(\xi_1)(x_1-x_0)+2(x_n-x_1)-2=\begin{cases}x_1 & \text{if } \xi_1=0\\ 0 & \text{if } \xi_1\ne 0\end{cases}\le\epsilon.$$

(iii) $\delta_{3,\epsilon}$ のときは、

$$\dot{\mathcal{P}}_3=\{([0,x_1],\xi_1),([x_1,1],\xi_2)\},$$

$$\xi_1-\delta_{3,\epsilon}(\xi_1)\le 0=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_1+\delta_{3,\epsilon}(\xi_1),\quad \xi_2-1\le 0<x_1\le\xi_2\le x_2=1\le\xi_2+1$$

となる。$\xi_1=0$ のとき $x_1\le\epsilon$ であるから

$$\sigma_{\dot{\mathcal{P}}_3}(f,[0,1])-2=\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)-2=\begin{cases}x_1 & \text{if } \xi_1=0\\ 0 & \text{if } \xi_1\ne 0\end{cases}\le\epsilon. \qquad \square$$

問題：上の計算では、初めから積分値が分かっていることを用いている。積分可能かどうかを（勿論想定される積分値を知らずに）調べるにはどうしたら良いか？これの、特異点や無限遠点のない場合の解答はすでに述べた。

2.3　特異点の処理例２

関数を

$$f(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x} & \text{if } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{if } x=0,\end{cases}\qquad \text{とすると}\qquad \int_0^1 f=2(=\lim_{\epsilon\to 0}2\sqrt{x}\big|_{x=\epsilon}^1(\text{広義 R-積分})).$$

証明：まず、

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\quad \text{と}\quad \Xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\},$$

かつ

$$\xi_1=0,\quad x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\quad (i=1,\cdots,n)$$

と とってみる。$(2\sqrt{x})'=1/\sqrt{x}$、$f(0)=0$ だから

$$\begin{aligned}\Big|2-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\Big| &\le \big|2-(2-2\sqrt{x_1})\big|+\left|\int_{x_1}^1\frac{dx}{\sqrt{x}}-\sum_{i=2}^n\frac{x_i-x_{i-1}}{\sqrt{\xi_i}}\right|\\ &\le 2\sqrt{x_1}+\sum_{i=2}^n\left(\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}}-\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)(x_i-x_{i-1})\end{aligned}$$

となるから、任意の $\epsilon>0$ に対して上式が ϵ より小となるように正関数 δ をとり、それに対する δ-細 P 仕切りが目印として $\xi_1=0$ を持たざるをえないようにすればよい。$0<c<1/2$ とし $0<\xi\le 1$ で $\delta(\xi)=c\xi$ なるものをとり、上に述べた仕切りが、δ-細仕切りとなるとすると、

$$0<x_i-x_{i-1}<2\delta(\xi_i)\le 2cx_{i-1}\quad \text{となるから}\quad \frac{x_i}{x_{i-1}}\le\frac{1}{1-2c}\quad \text{が従う。}$$

一方

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}}-\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)(x_i-x_{i-1})=(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i-1}})\frac{x_i-x_{i-1}}{\sqrt{x_ix_{i-1}}}$$

であり $1<\frac{x_i}{x_{i-1}}\le\frac{1}{1-2c}$ のとき

$$\frac{x_i-x_{i-1}}{\sqrt{x_ix_{i-1}}}<\frac{2cx_i}{x_{i-1}}\le\frac{2c}{1-2c}$$

となる。そこで c を $0<c<1/2$ と $2c/(1-2c)\le\epsilon/2$ を満たすように取り、$\delta(0)\le\epsilon^2/16$ と定義すると、

$$\begin{aligned}2\sqrt{x_1}+\sum_{i=2}^n\left(\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}}-\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)(x_i-x_{i-1}) &\le 2\sqrt{x_1}+\frac{2c}{1-2c}\sum_{i=2}^n(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i-1}})\\ &=2\sqrt{x_1}+\frac{2c}{1-2c}(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_1})<2\sqrt{x_1}+\frac{2c}{1-2c}\le 2\sqrt{\delta(0)}+\frac{2c}{1-2c}<\epsilon.\end{aligned}$$

故に、f は $[0,1]$ 上で HK-積分可能となる。　□

レポート問題：上の計算で積分値が分らないとして HK-積分可能性を示せ。

レポート問題：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}^{1/n}$ を求めよ。

3　HK-積分の一般的性質

3.1　零集合

まず、零集合という概念[17]を思い出しておこう。

[17]「有界集合上での有界関数が Riemann 積分可能ならば、不連続点は零集合をなす」というのが Lebesgue による Riemann 積分可能関数の特徴付けであった

定義 3.1.1 $\mathbb{R}$ 内の集合 Z が零集合（*null (measure zero or negligible) set*）であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して高々可算個の開区間 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ で

$$Z \subset \cup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \epsilon$$

なるものがあること、と定める。

すると、被積分関数の零集合上の違いは HK-積分の積分値には影響しない ことが次のように示される。

定理 3.1.1 $[a,b]$ 上殆ど到る所で $f(x) = 0$ とする[18]。即ち、零集合 Z があって、任意の $x \in [a,b] - Z$ に対し $f(x) = 0$ となる。このとき、f は *HK*-積分可能であり $\int_I f = 0$.

証明：$Z_i = \{x \in [a,b] \mid i-1 < |f(x)| \le i\}$ とし、$Z = \cup_{i=1}^{\infty} Z_i$ と定義する。仮定から Z_i は測度零である。任意の $\epsilon > 0$ をとると、各 i に対し開区間の可算個の和 G_i で長さが $\epsilon 2^{-i} i^{-1}$ 以下で $G_i \supset Z_i$ なるものがある。$\delta(\xi)$ を各 i に対し、$\xi \in Z_i$ のとき $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) \subset G_i$ であり他では任意にとったものとする。すると、任意の δ-細仕切り $\mathcal{D} = \{([u,v],\xi)\}$ に対し

$$\left| \sum f(\xi)(v-u) \right| < \epsilon. \qquad \square$$

前に述べた「Lebesgue による R-積分可能な関数の特徴付」の証明にも必要なので、第 3 回講義で述べた零集合の性質を再掲しておく。

零集合の性質　(i) 零集合の任意の部分集合はまた零集合である。
(ii) 零集合の高々可算個の和集合はまた零集合である。
(iii) 有界閉集合に関する限り、Jordan 測度 0 の集合と零集合とは一致する。ここで、

定義 3.1.2 集合 E が *Jordan* 測度 0 とは、任意の $\epsilon >$ に対し、有限個の区間 $I_1, I_2, \cdots, I_N$ が存在して

$$E \subset \cup_{j=1}^{N} I_j, \quad \sum_{j=1}^{N} |I_j| < \epsilon.$$

注意：上の「零集合の性質」(iii) で、条件「有界閉集合に関する限り」がどう使われるか、思い出しておいて欲しいものである。

3.2 積分の線形性、順序関係保存、領域に関する加法性等

定理 3.2.1 φ, ψ を有界閉区間 $I = [a,b]$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ 上の増加関数とする。
(i) $f, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ とし、$\gamma \in \mathbb{R}$ とする。$f+g, \gamma f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ であり

$$\int_a^b (f+g)d\varphi = \int_a^b f d\varphi + \int_a^b g d\varphi, \quad \int_a^b (\gamma f) d\varphi = \gamma \int_a^b f d\varphi.$$

(ii) $a < c < b$ とする。$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,c];\varphi) \cap \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([c,b];\varphi)$ ならば $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ であり

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^c f d\varphi + \int_c^b f d\varphi. \tag{2}$$

[18] $f = 0$ $(a.e.\, x)$ と書く

(iii) $f \in \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi)$ ならば、任意の $[c,d] \subset [a,b]$ に対して $f \in \mathcal{R}_{\rm HK}([c,d];\varphi)$.
(iv) $f, g \in \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi)$ であり、$[a,b]$ 上殆ど到る所 $f(x) \le g(x)$ ならば、

$$\int_a^b f d\varphi \le \int_a^b g d\varphi.$$

(v) $f \in \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi)$ かつ $|f| \in \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi)$ ならば、

$$\left| \int_a^b f d\varphi \right| \le \int_a^b |f| d\varphi.$$

(vi) $f \in \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi) \cap \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\psi)$ かつ $\gamma \ge 0$ とすると、$f \in \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi+\psi) \cap \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\gamma\varphi)$ であり、更に

$$\int_a^b f d(\varphi+\psi) = \int_a^b f d\varphi + \int_a^b f d\psi, \quad \int_a^b f d(\gamma\varphi) = \gamma \int_a^b f d\varphi.$$

もし $\psi = \varphi + \gamma$ のときは、$\mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\varphi) = \mathcal{R}_{\rm HK}([a,b];\psi)$ であり $\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f d\psi$.

証明：(i) は明らかであろう。(ii) の証明を与えよう。

$$A = \int_a^c f d\varphi, \quad B = \int_c^b f d\varphi$$

とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して $[a,c]$ 上の正関数 $\delta_1(\xi)$ があって、任意の δ_1-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}_1 = \{([u,v],\xi)\}$ に対して

$$\left| \sum f(\xi)\varphi([u,v]) - A \right| < \epsilon/2$$

となる。同様に、$\epsilon > 0$ に対して $[c,b]$ 上の正関数 $\delta_2(\xi)$ があって、$[c,b]$ 上の任意の δ_2-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}_2 = \{([u,v],\xi)\}$ に対して

$$\left| \sum f(\xi)\varphi([u,v]) - B \right| < \epsilon/2$$

となる。これより、関数を $0 < s, t < 1$ として

$$\delta(\xi) = \begin{cases} \min\{\delta_1(\xi), s(c-\xi)\}, & \xi \in [a,c), \\ \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\}, & \xi = c, \\ \min\{\delta_2(\xi), t(\xi-c)\}, & \xi \in (c,b], \end{cases}$$

と定め $[a,b]$ 上の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}$ を考えると、c は必ず $\dot{\mathcal{D}}$ の少なくとも一つの部分区間の目印点となっている（ことは前に示した）。そこで、もし $c = \xi_k$ が部分区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の内部にある（i.e. 端点ではない）ときは仕切り $\dot{\mathcal{D}}$ に ξ_k を仕切り点として加えた仕切り $\dot{\mathcal{D}}^*$

$$a = x_0 \le \cdots \le x_{k-1} < \xi_k < x_k \le \cdots \le x_n = b$$

を考え、$[x_{k-1}, \xi_k]$ と $[\xi_k, x_k]$ のそれぞれの目印点として $c = \xi_k$ をとれば

$$f(\xi_k)\varphi([x_{k-1}, x_k]) = f(\xi_k)\varphi([x_{k-1}, \xi_k]) + f(\xi_k)\varphi([\xi_k, x_k])$$

だから $\sigma_{\dot{\mathcal{D}}}(f;\varphi) = \sigma_{\dot{\mathcal{D}}^*}(f;\varphi)$ である[19]。

[19] この過程は逆に辿ることにより、目印点を内部に持つような仕切りができる事を意味する

これより、

$$\Big|\sum_{\dot{\mathcal{D}}^*} f(\xi)\varphi([u,v]) - (A+B)\Big| \le \Big|\sum_{\dot{\mathcal{D}}_1} f(\xi)\varphi([u,v]) - A\Big| + \Big|\sum_{\dot{\mathcal{D}}_2} f(\xi)\varphi([u,v]) - B\Big| < \epsilon$$

となるから、f は $\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ であり、$A+B$ を積分値としてもつ。

(ii) の別証明：$\chi_{[a,c]}$ を集合 $[a,c]$ の特性関数とし $f_1 = f\cdot\chi_{[a,c]}$ と定め、$f_2 = f\cdot\chi_{[c,b]}$ も同様に定める。$f_1, f_2 \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ と見なせるから[20]、(i) を用いて

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^b (f_1+f_2) d\varphi = \int_a^c f d\varphi + \int_c^b f d\varphi.$$

(iii) $[a,b] = [a,c]\cup[c,b]$, $[c,b] = [c,d]\cup[d,b]$ として (ii) を用いれば良い。

(iv) (i) より $g - f \ge 0$ は HK-積分可能になるから、望みの不等式が求まる。

(v) $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ と (iv) を用いれば良い。

(vi) これは明らかであろう。 □

補題 3.2.1 (The straddle lemma) 関数 $F: I \to \mathbb{R}$ が $\xi \in I$ で微分可能とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta_\epsilon(\xi) > 0$ があって、$u, v \in I$ が

$$\xi - \delta_\epsilon(\xi) \le u \le \xi \le v \le \xi + \delta_\epsilon(\xi)$$

を満たすならば

$$|F(v) - F(u) - F'(\xi)(v-u)| \le \epsilon(v-u).$$

証明：各点 $t \in I$ での微分可能性より、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $\delta_\epsilon(t)$ があって、

$$0 < |z-t| \le \delta_\epsilon(t) \Longrightarrow \left|\frac{F(z)-F(t)}{z-t} - F'(t)\right| \le \epsilon.$$

書き直すと

$$z \in I,\ |z-t| \le \delta_\epsilon(t) \Longrightarrow \big|F(z) - F(t) - F'(t)(z-t)\big| \le \epsilon|z-t|$$

となる。$u, v \in B(t, \delta_\epsilon(t))$ を $u \le t, v \ge t$ なるようにとり、足したり引いたりして

$$\begin{aligned}\big|F(v) - F(u) - F'(t)(v-u)\big| &= \big|[F(v) - F(t) - F'(t)(v-t)] - [F(u) - F(t) - F'(t)(u-t)]\big| \\ &\le \big|F(v) - F(t) - F'(t)(v-t) + \big|F(u) - F(t) - F'(t)(u-t)\big| \\ &\le \epsilon(v-t) + \epsilon(t-u) = \epsilon(v-u). \qquad \square\end{aligned}$$

補題 3.2.2 (Henstock or Saks-Henstock lemma) φ を有界閉区間 $I = [a,b]$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ 上の増加関数とする。I を有界閉区間とし、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I;\varphi)$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し、以下の性質を満たす有界閉区間 I 上の正関数 δ が存在する：I の中の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}} = \{(I_1,\xi_1),\cdots,(I_p,\xi_p)\}$、及びそれの任意の部分仕切り $\dot{\mathcal{D}}' = \{(I_{i_1},\xi_{i_1}),\cdots,(I_{i_q},\xi_{i_q})\}$ に対して

$$\left|\sum_{k=1}^q f(\xi_{i_k})\varphi(I_{i_k}) - \int_{\cup_{k=1}^q I_{i_k}} f d\varphi\right| < \epsilon, \quad \sum_{k=1}^q \left|f(\xi_{i_k})\varphi(I_{i_k}) - \int_{I_{i_k}} f d\varphi\right| < \epsilon.$$

---

[20] ここでも規約 $\pm\infty\cdot 0 = 0$ を用いている

証明：以下では $\dot{\mathcal{D}}'=\dot{\mathcal{D}}$ の場合について、上の 2 番目の不等式を示すことを考える。$\dot{\mathcal{D}}'\subset\dot{\mathcal{D}}$ の場合も同様にすれば良い。

$f\in\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I,\varphi)$ の定義から、任意の $\epsilon>0$ に対して I 上の正関数 δ があって、I の中の δ-細仕切り $\{(I_1,\xi_1),\cdots,(I_p,\xi_p)\}$ に対して $|\sigma_{\mathcal{P}}(f,I;\varphi)-\int_I fd\varphi|<\epsilon/3$ となる。

必要ならば番号付けを変えて、ある数 k $(1\le k\le p)$ があって $i=1,\cdots,k$ のとき数 $f(\xi_i)\varphi(I_i)-\int_{I_i}f$ が非負、$i=k+1,\cdots,p$ のときは負とできる。Cousin の補題と定理 3.2.1(iii) から、$f\in\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I_i;\varphi)$ だから任意の $i\in\{1,\cdots,p\}$ に対して I_i の δ_i-細仕切り $\mathcal{P}_i$ で $|\sigma_{\mathcal{P}_i}(f,I_i;\varphi)-\int_{I_i}fd\varphi|<\epsilon/3p$ となるものがある。ここで、$\delta_i(x)\le\delta(x)$ $(x\in I_i)$ と仮定して一般性を失わない。そこで

$$\mathcal{P}=\{(I_1,\xi_1),\cdots,(I_k,\xi_k)\}\cup\cup_{i=k+1}^{p}\mathcal{P}_i,$$
$$\mathcal{Q}=\{(I_{k+1},\xi_{k+1}),\cdots,(I_p,\xi_p)\}\cup\cup_{i=1}^{k}\mathcal{P}_i,$$

とおくと、これらは共に I の δ-細仕切りである。故に

$$\frac{\epsilon}{3}>\left|\sigma_{\mathcal{P}}(f,I;\varphi)-\int_I fd\varphi\right|\ge\sum_{i=1}^{k}\left[f(\xi_i)\varphi(I_i)-\int_{I_i}fd\varphi\right]-\left|\sum_{i=k+1}^{p}\left[\sigma_{\mathcal{P}_i}(f,I_i;\varphi)-\int_{I_i}fd\varphi\right]\right|$$
$$\ge\sum_{i=1}^{k}\left|f(\xi_i)\varphi(I_i)-\int_{I_i}fd\varphi\right|-(p-k)\frac{\epsilon}{3p}.$$

同様に

$$\frac{\epsilon}{3}>\sum_{i=k+1}^{p}\left|f(\xi_i)\varphi(I_i)-\int_{I_i}f\right|-k\frac{\epsilon}{3p}.$$

この両辺を加えあわせて、補題は証明される。　□

系 3.2.1 有界閉区間 $[a,b]$ の各 c $(a<c\le b)$ に対し $\int_a^c f=0$ となるならば、$\int_a^b|f|=0$ である。

証明：任意の $\epsilon>0$ に対して δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}$ を $|\sigma_{\dot{\mathcal{D}}}(f,[a,b];\varphi)-\int_a^b fd\varphi|<\epsilon$ なるようにとる。仮定と積分の性質から

$$\int_c^d fd\varphi=\int_a^d fd\varphi-\int_a^c fd\varphi=0$$

となる。故に、任意の $(J,\xi)\in\dot{\mathcal{D}}$ に対し $|f(\xi)\varphi(J)-\int_J fd\varphi|=|f(\xi)|\varphi(J)$ であり、これは Henstock の補題より $\sigma_{\dot{\mathcal{D}}}(|f|,I;\varphi)|\le 2\epsilon$ を意味する。　□

系 3.2.2 $f\in\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ とし、有界閉区間 $[a,b]$ の各 x に対し $F(x)=\int_a^x fd\varphi$ とおく。もし、φ が $c\in[a,b)$ で右連続ならば、F もそうであり、φ が $c\in(a,b]$ で左連続ならば F もそうである。

証明：任意の $\epsilon>0$ に対し Henstock の補題より、$[a,b]$ 上の正関数 δ があって $[a,b]$ の δ-細仕切り $\{(A_1,x_1),\cdots,(A_p,x_p)\}$ に対して

$$\sum_{i=}^{p}\left|f(x_i)\varphi(A_i)-\int_{A_i}fd\varphi\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

となる。さて、φ が $c\in[a,b)$ において右連続と仮定と、$\Delta>0$ があって $B\subset[a,b]\cap[c,c+\Delta)$ となる任意の有界閉区間に対して $|f(c)|\varphi(B)<\epsilon/2$ となる。そこで $\eta=\min\{\Delta,\delta(c)\}$ とおき、$x\in(c,c+\eta)\cap[a,b]$ を選ぶ。一方、積分区間分割に関する積分の性質から $\int_c^x fd\varphi=F(x)-F(c)$ である。$\{([c,x],c)\}$ は $[a,b]$ の δ-細仕切りだから、

$$\left||f(c)|\varphi([c,x])-|F(x)-F(c)|\right|\le\left|f(c)\varphi([c,x])-\int_c^x fd\varphi\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

となる。故に、$|F(x) - F(c)| < \epsilon$、F は c で右連続である。主張の後半部分も同様に証明できる。 $\square$

注意：上の結果から、「F が $c \in [a, b]$ で連続である必要十分条件は φ が $c \in [a, b]$ で連続であるか $f(c) = 0$ となることである」。

主張 3.2.1 数列 $\{a_k\}$ を与え、関数を以下のように定める時

$$f(x) = a_k \quad \textit{if } k-1 \le x < k \textit{ for } k = 1, 2, \cdots \quad \Longrightarrow \left(\exists \int_0^\infty f \Longleftrightarrow \exists \sum_{k=1}^\infty a_k\right).$$

証明：$\exists \int_0^\infty f \Longleftrightarrow \exists \lim_{t\to\infty} \int_0^t f$ でありかつ $\int_0^\infty f = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f$ となることは知られている。$[0, t]$ 上で可算個の点を除いて f の原始関数は $\int_0^t f = \sum_{k=1}^m a_k + (t - m)a_{m+1}$ $(m \le t < m + 1)$ で与えられる。故に、$\exists \int_0^\infty f$ のとき、t を整数に制限して $\int_0^\infty f = \lim_{m\to\infty} \int_0^m f = \sum_{k=1}^\infty a_k$ となる。逆に $\exists \sum_{k=1}^\infty a_k$ のとき、$\lim_{m\to\infty} a_m = 0$ となっている。だから、$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^\infty a_k$. $\square$

主張 3.2.2 どんな収束級数にも対応する *HK*-積分可能な関数を構成できる。

概略: 実数値の級数 $\sum_{k=1}^\infty a_k$ が収束しているならば、$c_n = 1 - 2^{-n}$ とおくとき、

$$h(x) = \begin{cases} 2^k a_k & \text{for } x \in [c_{k-1}, c_k), \\ 0 & \text{for } x = 1, \end{cases} \Longrightarrow h \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([0, 1]) \quad \text{and} \quad \int_0^1 h = \sum_{k=1}^\infty a_k.$$

レポート問題：上の主張を証明せよ。

定理 3.2.2 (Squeeze Theorem) $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I; \varphi)$ となる必要十分条件は任意の $\epsilon > 0$ に対し 2 つの関数 $\phi_\epsilon, \psi_\epsilon \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I; \varphi)$ で、任意の $x \in I$ で $\phi_\epsilon(x) \le f(x) \le \psi_\epsilon(x)$ であり

$$\int_I (\psi_\epsilon(x) - \phi_\epsilon(x)) d\varphi \le \epsilon$$

となるものがあること、である。

証明：$\Longrightarrow$): $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I; \varphi)$ より、任意の $\epsilon > 0$ に対し $\phi_\epsilon = \psi_\epsilon = f$ とおく。
$\Longleftarrow$): 任意の $\epsilon > 0$ をとる。もし $\phi_\epsilon \le f \le \psi_\epsilon$ ならば、I 上の任意の $\dot{\mathcal{P}}$ に対し

$$\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(\phi_\epsilon; \varphi) \le \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f; \varphi) \le \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(\phi_\epsilon; \varphi).$$

$\phi_\epsilon \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I; \varphi)$ より I 上のゲージ $\delta'_\epsilon > 0$ があって、もし $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta'_\epsilon$ ならば $|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(\phi_\epsilon; \varphi) - \int_I \varphi_\epsilon d\varphi| \le \epsilon$ 故に $\int_I \varphi_\epsilon d\varphi - \epsilon \le \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(\phi_\epsilon; \varphi)$ となる。同様に、I 上のゲージ $\delta''_\epsilon > 0$ があって、もし $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta''_\epsilon$ ならば $\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(\psi_\epsilon; \varphi) \le \int_I \psi_\epsilon d\varphi + \epsilon$. $\delta_\epsilon = \min\{\delta'_\epsilon, \delta''_\epsilon\}$ とおく。もし $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\epsilon$ ならば

$$\int_I \varphi_\epsilon d\varphi| - \epsilon \le \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f; \varphi) \le \int_I \psi_\epsilon d\varphi + \epsilon$$

もし $\dot{\mathcal{Q}} \ll \delta_\epsilon$ ならば

$$-\int_I \psi_\epsilon d\varphi - \epsilon \le -\sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f; \varphi) \le -\int_I \phi_\epsilon d\varphi| + \epsilon.$$

両辺を加えて

$$-\int_I (\psi_\epsilon - \phi_\epsilon) d\varphi - 2\epsilon \le \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f; \varphi) - \sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f; \varphi) \le \int_I (\psi_\epsilon - \phi_\epsilon) d\varphi + 2\epsilon$$

となる。故に

$$|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f; \varphi) - \sigma_{\dot{\mathcal{Q}}}(f; \varphi)| \le \int_I (\psi_\epsilon - \phi_\epsilon) d\varphi + 2\epsilon \le 3\epsilon.$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから、f は Cauchy の判定条件を満たす。故に F は HK-積分可能である。 $\square$

定理 3.2.3 f を有界閉区間 $[a,b]$ 上の関数で、任意の $c \in (a,b)$ に対して $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,c],\varphi)$ なるものとする。もし極限 $\lim_{c\to b-0}\int_a^c f d\varphi = I$ が存在するならば、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b],\varphi)$ であり、

$$\int_a^b f d\varphi = I + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

特に、φ が b で左連続ならば $\int_a^b f d\varphi = I$ となる。

証明：任意に $\epsilon > 0$ をとり $c \in (a,b)$ を $c < t < b$ かつ

$$|f(b)|\cdot[\varphi(b-0) - \varphi(t)] < \epsilon \quad \text{and} \quad \left|\int_a^t f d\varphi - I\right| < \epsilon$$

を満たすように選ぶ。狭義単調増加数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $[a,b)$ の中に $x_0 = a,\ \lim x_n = b$ となるように選ぶ。Henstock の補題より、$[x_{n-1},x_n]$ 上の正関数 δ_n を、$[x_{n-1},x_n]$ の任意の δ_n-P 細仕切り $\{(A_1,\xi_1),\cdots,(A_p,\xi_p)\}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{p}\left|f(\xi_i)\varphi(A_i) - \int_{A_i} f d\varphi\right| < \epsilon 2^{-n}$$

となるようにとれる。そこにおいて、一般性を失うこと無しに $\delta_1(x_0) \le x_1 - x_0$、更に、任意の $y \in (x_{n-1},x_n) n = 1,2,\cdots$ に対し、

$$\delta_{n+1}(x_n) = \delta_n(x_n) \le \min\{x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n\}, \quad \delta_n(y) \le \min\{y - x_{n-1}, x_n - y\}$$

と仮定することができる。$[a,b]$ 上の正関数 δ を

$$\delta(y) = \begin{cases} \delta_n(y), & c \in [x_{n-}, x_n],\ n = 1,2,\cdots, \\ b - c, & y = b \end{cases}$$

と定め、$[a,b]$ 上の δ-P 細仕切り $\mathcal{P} = \{(A_1,\xi_1),\cdots,(A_p,\xi_p)\}$ を選ぶ。適当に番号を付け替えると、$A_i = [t_{i-1},t_i]$、$a = t_0 < \cdots < t_p = b$ とできる。$t_{i-1} < \xi_i < t_i$ のとき $([t_{i-1},t_i],\xi_i)$ を $\{([t_{i-1},\xi_i],\xi_i),([\xi_i,t_i],\xi_i)\}$ で置き換えると、$[a,b]$ 上の δ-P 細仕切り $\mathcal{Q}$ で $\sigma(f,\mathcal{Q}) = \sigma(f,\mathcal{P})$ となるものが得られる。そこで一般性を失わずに

$$\{\xi_1,\cdots,\xi_p\} \subset \{t_0,t_1,\cdots,t_p\}.$$

と仮定できる。もし $\mathcal{P}_n = \{(A_i,\xi_i) \mid A_i \subset [x_{n-1},x_n]\}$ で、k が $x_k \ge t_{p-1}$ なる最初の正整数とすると、正関数 δ の定義から

(i) $n = 1,\cdots,k-1$ に対して $\mathcal{P}_n$ は $[x_{n-1},x_n]$ の δ_n-P 細仕切りである。

(ii)$\mathcal{P}_k$ は $[x_{k-1},t_{p-1}]$ の δ_k-P 細仕切りである。特に、$\mathcal{P}_k$ は $[x_{k-1},x_k]$ の δ_k-P 細仕切りである。

(iii) $\mathcal{P} = (\cup_{n=1}^{k}\mathcal{P}_n) \cup \{([t_{p-1},b],b)\}$

が分る。これより、

$$\int_a^{t_{p-1}} f d\varphi = \sum_{n=1}^{k-1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f d\varphi + \int_{x_{k-1}}^{t_{p-1}} f d\varphi$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left|\sigma(f,\mathcal{P}) - I - f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)]\right| &\le \left|f(b)[\varphi(b) - \varphi(t_{p-1})] - f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)]\right| + \sum_{n=1}^{k-1}\left|\sigma(f,\mathcal{P}_n) - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f d\varphi\right| \\ &\quad + \left|\sigma(f,\mathcal{P}_k) - \int_{x_{k-1}}^{t_{p-1}} f d\varphi\right| + \left|\int_a^{t_{p-1}} f d\varphi - I\right| \\ &< |f(b)|\cdot[\varphi(b-) - \varphi(t_{p-1})] + \sum_{n=1}^{k}\epsilon 2^{-n} + \epsilon < 3\epsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

注意：上の定理は「HK-積分には広義積分は存在しない」別の表現をすれば「**広義積分的な操作をしても HK-積分可能なクラスは拡がらない**」ことを示している。**注意**：$\int_0^1 x^{-s}\cos x^{-1}$ について.

主張 3.2.3 $s<2$ ならば $f\in\mathcal{R}_{HK}([0,1])$ であるが、$s<1$ のときのみ $f\in\mathcal{R}_M([0,1])$ である。即ち、一般に $\mathcal{R}_M([0,1])\subset\mathcal{R}_{HK}([0,1])$ だが、真に含まれている.

定義 3.2.1 $\mathcal{P}=\{([x_0,x_1],\xi_1),([x_1,x_2],\xi_2),\cdots,([x_{n-1},x_n],\xi_n)\}$ が $I=[a,b]$ の仕切りであるとは、$I=\cup_{i-1}^n[x_{i-1},x_i]$ かつ $\xi_i\in\mathbb{R}$ なる事を言う。更に正の関数 δ をとるとき、この仕切り $\mathcal{P}$ が δ-細とは、$i=1,2,\cdots,n$ $[x_{i-1},x_i]\in U(\xi_i,\delta(\xi_i))$ となることである。

定義 3.2.2 関数 f が I 上で M-積分可能とは、ある数 A があって、任意の $\epsilon>0$ に対して正関数 δ があって、I の任意の δ-細仕切り $\mathcal{P}$ に対して

$$|\sigma(f,\mathcal{P})-A|<\epsilon$$

となることである。このとき $f\in\mathcal{R}_M([0,1])$ と書き、$A=\int_a^b f$ と表示する。

上の主張 5.7.2 の証明は後に与える。

主張 3.2.4

$$F(x)=\begin{cases}x^2\cos\pi x^{-2} & 0<x\le 1,\\ 0 & x=0,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}2x\cos\pi x^{-2}+2\pi x^{-1}\sin\pi x^{-2} & 0<x\le 1,\\ 0 & x=0,\end{cases}$$

とおくと、$f\notin\mathcal{R}_M([0,1])$ となる。

$\because$) 主張を背理法で示そう。$f\in\mathcal{R}_M([0,1])$ とすると、$|f|\in\mathcal{R}_M([0,1])$、特に

$$\mathcal{R}_M([0,1])\ni g(x)=\begin{cases}x^{-1}|\sin\pi x^{-2}| & 0\notin x,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

変数変換[21]$t=x^{-2}$ により

$$\begin{aligned}\int_0^1 gdx &\ge \int_{1/\sqrt{n}}\frac{|\sin\pi x^{-2}|}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^n\frac{|\sin\pi t|}{t}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k\frac{|\sin\pi t|}{t}\\ &\ge\frac{1}{2}\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}\int_{k-1}^k|\sin\pi t|=\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}\to\infty\ (n\to\infty).\quad \text{矛盾!}\end{aligned}$$

注意：この場合、関数 f は M 積分可能ではないにもかかわらず、積分値があれば それは $F(1)-F(0)$ になるはずと考えられる。

3.2.1 計算例：$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

まずこれが広義 (improper) R-積分可能であることを思い出そう。$0<v<u<\infty$ とし、部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\left|\int_v^u\frac{\sin x}{x}dx\right| &= \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_v^u-\int_v^u\frac{\cos x}{x^2}dx\right|\\ &\le\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\int_v^u\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{v}\to 0\quad(v\to\infty).\end{aligned}$$

[21]積分記号下の変数変換則、代入 (substitution) はすぐ後に証明する

これより、Cauchy の判定条件が満たされていることが分かり、広義 R-積分として存在する。また、絶対積分可能ではない;

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n\pi} dx > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx$$
$$= \frac{2}{(n+1)\pi} > \frac{2}{\pi} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}$$
$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \log(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

積分値の求め方 1 ：関数

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1} & 0 < x \le \pi, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

が $[0,\pi]$ で連続であること及び $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi g(x)\sin(\frac{2n+1}{2}x)dx = 0$ （Riemann-Lebesgue の定理）を用いて、広義 R 積分での極限操作の交換可能性より

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt\right) dt = \frac{\pi}{2}.$$

積分値の求め方 2 (収束因子を用いる方法) ：広義 R 積分

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

が定義でき、微分もできて

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \quad (t > 0), \qquad \lim_{t\to\infty} F(t) = 0$$

となる。これより

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t \quad (t > 0)$$

であり、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t\to 0} F(t) = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

積分値の求め方 3 (重積分を用いる方法) ： $t > 0$ とすると以下の広義 R 積分は

$$\int_0^\infty e^{-tx} \cos sx dx = \frac{t}{t^2+s^2}$$

であり、この R 積分は s に関して一様に収束する。故に、R 積分の順序交換が出来て

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty e^{-tx} \cos sx dx\right) ds = \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-tx} \cos sx ds\right) dx = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

となる。上式より

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{t}{t^2+s^2} ds = \arctan\frac{1}{t} \quad (t > 0)$$

となるから、$t \to 0$ として結果が従う。

積分値の求め方 4 (複素積分を用いる方法)　：$f(z) = e^{iz}/z$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則だがこの領域は星形ではない。$D = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \geq 0\}$ とするとこれは i に関し星形で、閉曲線 C を図のようにとると、Cauchy の定理より

$$\int_C f = \sum_{k=1}^{4} \int_{C_k} f + \int_{\epsilon}^{R} f + \int_{-R}^{-\epsilon} f = 0$$

が成立する。また

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{R} f + \int_{-R}^{-\epsilon} f &= \int_{\epsilon}^{R} x^{-1}(e^{ix} - e^{-ix})dx \\ &= 2i \int_{\epsilon}^{R} x^{-1} \sin x dx \to 2i \int_{0}^{\infty} x^{-1} \sin x dx \ (\epsilon \to 0,\ R \to \infty)\end{aligned}$$

だから、他の項を計算すれば良い。C_1 では $z = R + yi$ だから

$$\left| \int_{C_1} f \right| \leq \frac{1}{R} \int_{0}^{T} e^{-y} dy \leq \frac{1}{R} \int_{0}^{\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{R} \to 0 \ (R \to \infty)$$

同様に C_3 で $\left| \int_{C_3} f \right| \to 0 \ (R \to \infty)$. C_2 では $z = x + Ti$ で

$$\left| \int_{C_2} f \right| \leq \frac{2Re^{-T}}{T} \to 0 \ (T \to \infty)$$

となる。0 での Taylor 展開より $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$ で、$g(z)$ は収束半径 ∞ の整級数である。$\sup_{|z| \leq 1} |g(z)| = M$ とおくと

$$\left| \int_{C_4} g(z) \right| \leq \pi \epsilon M \to 0 \ (\epsilon \to 0)$$

である。変数変換 $z = e^{i\theta}$ より

$$\int_{C_4} z^{-1} dz = \int_{\pi}^{0} i d\theta = -\pi i$$

となるから

$$\int_{C_4} f(z) dz \to -\pi i \ (\epsilon \to 0)$$

である。故に

$$2i \int_{0}^{\infty} x^{-1} \sin x dx - \pi i = 0. \qquad \square$$

図 1: 積分路表示

レポート問題：この関数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ が $[0, \infty)$ 上で HK-積分可能なことを直接示せ。

4　微積分の基本定理

定義 4.0.3 $I=[a,b]$ とし、関数 $F, f: I \to \mathbb{R}$ を考える：
(a) F が I 上で f の原始関数 (primitive, anti-derivative) とは、任意の $x \in I$ に対し $F'(x)$ が存在し $F'(x)=f(x)$ となることである。
(b) F が I 上で f の $a.e$[22]-原始関数とは、F が I 上で連続であり、ゼロ集合 E があって $x \in I \setminus E$ に対し $F'(x)=f(x)$、また $x \in E$ に対し $F'(x)$ が存在しないか、存在しても $f(x)$ と一致しないときをいう。集合 E が 可算集合（或いは有限集合）の時、F を f の cme[23]-原始関数（或いは fme[24]-原始関数）という。

補題 4.0.3 (The straddle lemma) 関数 $F: I \to \mathbb{R}$ が $\xi \in I$ で微分可能とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta_\epsilon(\xi) > 0$ があって、$u, v \in I$ が

$$\xi - \delta_\epsilon(\xi) \le u \le \xi \le v \le \xi + \delta_\epsilon(\xi)$$

を満たすならば

$$|F(v) - F(u) - F'(\xi)(v-u)| \le \epsilon(v-u).$$

ポイント：微分可能の定義からは $F(\xi+h)-F(\xi)-F'(\xi)h = o(|h|)$ が従うが、この補題は $F'(\xi)$ と $F(x)$ の ξ 近辺での振る舞いとを関連付けている。

補題 4.0.4 (Henstock or Saks-Henstock lemma) φ を有界閉区間 $I=[a,b]$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ 上の増加関数とする。I を有界閉区間とし、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I;\varphi)$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し、以下の性質を満たす有界閉区間 I 上の正関数 δ が存在する：I の中の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}} = \{(I_1,\xi_1), \cdots, (I_p,\xi_p)\}$、及びそれの任意の部分仕切り $\dot{\mathcal{D}}' = \{(I_{i_1},\xi_{i_1}), \cdots, (I_{i_q},\xi_{i_q})\}$ に対して

$$\left| \sum_{k=1}^{q} f(\xi_{i_k})\varphi(I_{i_k}) - \int_{\cup_{k=1}^{q} I_{i_k}} f d\varphi \right| < \epsilon, \quad \sum_{k=1}^{q} \left| f(\xi_{i_k})\varphi(I_{i_k}) - \int_{I_{i_k}} f d\varphi \right| < \epsilon.$$

ポイント：$f(\xi_j)(b_j - a_j)$ は $F(b_j) - F(a_j)$ の近似値であり $F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)$ は誤差と考えられる。HK 積分の定義より誤差の総和は小さいことは保証されているが、実は、誤差の絶対値の総和も小さいことがこの Henstock の補題の意味である。更に、如何なる部分和の誤差も小さい事も示されている。この補題は HK 積分可能な関数の不定積分の連続性の証明に使われる。

定理 4.0.4 (Fundamental Theorem I) F が閉区間 $I=[a,b]$ 上で cme-微分可能ならば、$F' \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I,\lambda)$ であり、更に

$$\int_a^b F' d\lambda = F(b) - F(a).$$

証明：$C = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ 以外で F は微分可能とする。$f(c_k) = 0$ と仮定して一般性を失わない[25]。$\epsilon > 0$, $\xi \in [a,b] \setminus C$ に対して $\delta_\epsilon(\xi) > 0$ を補題 3.2.1 のように定める。$\xi \in C$ のとき $\xi = c_k$ なる整数 $k \in \mathbb{N}$ がある。F の c_k における連続性から $\delta_\epsilon(c_k) > 0$ があって $z \in [a,b]$ かつ $|z - c_k| \le \delta_\epsilon(c_k)$ なるとき、$|F(z) - F(c_k)| \le \epsilon 2^{-k-2}$ となる。これで $[a,b]$ 上の正関数 $\delta_\epsilon(\xi)$ が定まる。$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ を δ_ϵ-細 P 仕切りとする。もし (i)

[22] almost everywhere
[23] countably many exceptions, or nearly everywhere
[24] finitely many exceptions
[25] 零集合での値は積分の値に影響しないことは、この記事の都合上後述

$\{\xi_i\} \cap C \neq \emptyset$ ならば、そのまま上の補題 3.2.2 の証明を用いれば良い。(ii) 整数 $k \in \mathbb{N}$ があって $\xi_i = c_k$ となっているときは

$$\begin{aligned}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| &\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| + |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \epsilon 2^{-k-2} + \epsilon 2^{-k-2} + 0 = \epsilon 2^{-k-1}.\end{aligned}$$

C の点は $\dot{\mathcal{P}}$ の高々 2 つの部分区間の目印となるので、$\xi_i \in C$ なるものの和は

$$\sum_{\xi_i \in C} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon 2^{-k} = \epsilon$$

となる。$\xi_i \notin C$ のときは、補題 3.2.1 より

$$\sum_{\xi_i \notin C} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \epsilon \sum_{\xi_i \notin C} (x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon(b-a).$$

$\dot{\mathcal{P}}$ を δ_ϵ-細 P 仕切りとすると

$$|F(b) - F(a) - \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f)| \leq \epsilon(1 + b - a). \qquad \square$$

注意：Lebesgue の特異関数[26]は上の定理での可算集合 C を零測度集合とは置き換えられない例である。また、上の定理での F の連続性を取り除くことも出来ないことは以下の例で示される；$F = \chi_{[0,1]}$ として

$$\int_{-1}^{1} \chi'_{[0,1]} d\lambda = 0 \neq 1 = \chi_{[0,1]}(1) - \chi_{[0,1]}(-1) \qquad \because)\ \chi'_{[0,1]} = 0 \quad \text{for} \quad x \in (-1,0) \cup (0,1).$$

定理 4.0.5 (Fundamental Theorem II) $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ とし、f は $c \in [a,b)$ で右極限 A をもつとする。このとき、

$$F_u(x) = \int_u^x f$$

とおくと、これは c で右微分可能で A となる。

証明：本質的に変わらないので、$u = a$ の場合のみ考察し、F_a を F と記す。h を $0 < h < \eta$ なるものとする。f は可積分なので $[a,c]$, $[a, c+h]$, $[c, c+h]$ でも可積分で $F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$ となる。f は $c \in [a,b)$ で右極限 A をもつので、$x \in (c, c+\eta)$ で $A - \epsilon \leq f(x) \leq A + \epsilon$ となる。これより $(A-\epsilon)h \leq \int_c^{c+h} f \leq (A+\epsilon)h$ となるので、

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - A \right| \leq \epsilon$$

となる。故に

$$F'_+(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = A. \qquad \square$$

もう少し詳しく考察するために、以下の概念を準備する：

定義 4.0.4 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする。
(i) F が集合 $E \subset [a,b]$ 上で <u>絶対連続 *AC*</u>(=absolutely continuous) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、すべての互いに疎[27] な有限個の開区間 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ $(x_i, y_i \in E)$ に対して $\sum_{i=1}^N (y_i - x_i) < \delta$ なる限り、$\sum_{i=1}^N |F(x_i) - F(x_j)| < \epsilon$ となることをいう。

[26] 付録参照

[27] $i \neq j$ ならば $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset$

(ii) F が集合 $E \subset [a,b]$ 上で狭義絶対連続 AC_*(=absolutely continuous in the restricted sense) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、すべての互いに疎な有限個の開区間 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ $(x_i, y_i \in E)$ に対して $\sum_{i=1}^N (y_i - x_i) < \delta$ なる限り、$\sum_{i=1}^N \sup_{x,y\in[x_i,y_i]} |F(x) - F(y)| < \epsilon$ となることをいう。
(iii) F が集合 $E \subset [a,b]$ 上で狭義一般絶対連続 ACG_* (=generalised absolutely continuous in the restricted sense) とは、F が連続で、E が可算個の集合の合併で、その各集合上で F が AC_* なることである。
(iv) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $E \subset \mathbb{R}$ 上で零変動 (negligible variation) である（$f \in NV_I(E)$ と記す）とは、任意の $\epsilon > 0$ に対し E 上のゲージ δ_ϵ があって、$\dot{\mathcal{P}}_0 = \{[a_j, b_j], \xi_j\}_{j=1}^s$ が I の任意の (δ_ϵ, E)-細仕切りならば

$$\sum_{j=1}^s \big|f(b_j) - f(a_j)\big| \le \epsilon$$

を満たすことをいう。ここで (δ_ϵ, E)-細仕切りとは δ_ϵ-細仕切りであって全ての目印点が $\xi_j \in E$ を満たすことをいう。

定理 4.0.6 (Fundamental Theorem II*) $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ $(I = [a,b])$ とすると、f の任意の不定積分 F は I 上連続であり、殆ど到る所で微分可能で f の *a.e*-原始関数となっている。即ち、零集合 $Z \subset I$ があって、任意の $x \in I \backslash Z$ に対して

$$F'(x) = f(x).$$

コメント：この定理の証明には、今少し準備が必要である。講義時間の関係で説明できるかどうか怪しいのでこの証明は別に用意する事にし、差し当たりこの定理が成立すると認めて先に進もう。

主張 4.0.5 『f が *HK*-積分可能である』$\iff$『ACG_* な関数 F があって $F' = f$ *(a.e.)* となる。このとき更に、$F(x) - F(a) = \int_a^x f$ となる』

主張 4.0.6 ACG_* ならば、ほとんど至る所微分可能 [*differentiable almost everywhere*] である。

主張 4.0.7 *(i)* $f \in NV_I(E)$ ならば f は E の各点で連続である。逆に、I の可算集合 C で $f : I \to \mathbb{R}$ が C の各点で連続ならば、$f \in NV_I(C)$ である。
(ii) しかし、零集合 $Z \subset I$ に対し、I 上の全ての連続関数が $NV_I(Z)$ とは限らない。例えば、*Cantor-Lebesgue* の特異関数は $[0,1]$ 上で単調増加で連続だが $NV_I(\Gamma)$ ではない。ここで Γ は *Cantor* 集合。

定理 4.0.7 (Fundamental Theorem of Calculus) *(I)* $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする。

『$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b])$ で、任意の $x \in [a,b]$ に対して $F(x) = \int_a^x f$ となる』
$\iff$『関数 F が $[a,b]$ 上 ACG_*、$F(a) = 0$ かつ、(a,b) 上ほとんど至る所 $F' = f$ となる。
更に、$\int_a^b f$ が存在し、$x \in (a,b)$ で f が連続ならば $\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x)$ となる』

(II) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする。

『F が $[a,b]$ 上 ACG_* である』
$\iff$『(a,b) 上ほとんど至る所 F' が存在し、F' は $[a,b]$ 上 *HK*-積分可能で、
任意の $x \in (a,b)$ に対して $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ となる』

系 4.0.3 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上連続で (a,b) 上 *cme* 微分可能とする。すると、F' は $[a,b]$ 上 *HK*-積分可能で、任意の $x \in (a,b)$ に対して $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ となる。

主張 4.0.8 $f \sim g$ とは $f = g$ (a.e) なるものとする。ベクトル空間を

$$\mathcal{A} = \{f \mid [a,b](\subset [-\infty,\infty]) \text{ 上 } HK\text{-積分可能な関数 }\}/\sim,$$
$$\mathcal{B} = \{f \mid ACG_* \text{ かつ } f(a) = 0\}$$

と定めるとき、積分と微分は逆演算である。実際、演算 $\int$ を任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して $\int[f](x) = \int_a^x f$、演算 D を任意の $f \in \mathcal{B}$ に対して $D[f](x) = f'(x)$ と定めると、微分積分の基本定理は

$$D \circ \int = I_{\mathcal{A}}, \qquad \int \circ D = I_{\mathcal{B}}.$$

主張 4.0.9 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり $g : I \to \mathbb{R}$ は I 上で $g(x) = f(x)$ $a.e.$ なるものとする。このとき、$g \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり $\int_I f = \int_I g$ となる。

定理 4.0.8 (Characterization Theorem) $F : I \to \mathbb{R}$ が関数 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ の不定積分である必要十分条件は零集合 $Z \subset I$ があって、任意の $x \in I \setminus Z$ で $F'(x) = f(x)$ であり、かつ $F \in NV_I(Z)$ なることである。更に、このとき任意の $x \in I$ に対して

$$\int_a^x f = F(x) - F(a). \tag{3}$$

証明：$\Longrightarrow$) $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ とし $G(x) = \int_a^x f$ とおく。このとき定理 5.6 により零集合 $Z \subset I$ があって、各点 $x \in I \setminus Z$ で $G'(x) = f(x)$ となる。そこで

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \setminus Z, \\ 0 & x \in Z \end{cases}$$

と定義すると、主張 4.0.9 より $f_1 \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり、G は f_1 の a を基点とする不定積分である。故に、任意の $\epsilon > 0$ に対しゲージ η_ϵ があって $\dot{\mathcal{P}} \ll \eta_\epsilon$ ならば

$$\left| \int_a^b f_1 - \sigma(f_1; \dot{\mathcal{P}}) \right| \leq \frac{1}{2}\epsilon.$$

さて、$\dot{\mathcal{P}}_0 = \{([a_j, b_j], \xi_j)\}_{j-1}^s$ を I の任意の (η_ϵ, Z)-細仕切りとする。$\dot{\mathcal{P}}_0$ は I のある η_ϵ-細仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ の部分集合となるから、Henstock の補題 3.2.2 より

$$\sum_{j=1}^s \left| f_1(\xi_j)(b_j - a_j) - \int_{a_j}^{b_j} f_1 \right| \leq \epsilon$$

となる。このとき、$f_1(\xi_j) = 0$ かつ $\int_{a_j}^{b_j} f_1 = G(b_j) - G(a_j) (j = 1, \cdots, s)$ だから、$\sum_{j=1}^s |G(b_j) - G(a_j)| \leq \epsilon$ となる。$\dot{\mathcal{P}}_0$ は任意の (η_ϵ, Z)-細仕切りだったから、G は Z 上で零変動をもつ。f の任意の不定積分 F をとると、$F = G + F(a)$ だから任意の $x \in I \setminus Z$ に対して $F'(x) = G'(x) = f(x)$ であり、更に $F(a_j) - F(b_j) = G(a_j) - G(b_j)$ より $F \in Nb_i(Z)$ となる。また $G(x) = F(x) - F(a)$ だから(3) が成り立つ。
$\Longleftarrow$) Z を零集合、$F \in Nb_i(Z)$ が $I \setminus Z$ 上で微分可能とする。

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & x \in I \setminus Z, \\ 0 & x \in Z \end{cases}$$

と定めたとき、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり F は f の不定積分であることを示す。

任意の $\epsilon > 0$ に対してゲージ δ_ϵ を次のようにつくる：$x \in I \setminus Z$ に対して Straddle の補題 3.2.1 より、δ_ϵ があって $x \in [u, v] \subset [x - \delta_\epsilon(x), x + \delta_\epsilon(x)]$ のとき

$$\big| F(v) - F(u) - f(x)(v - u) \big| \leq \epsilon(v - u).$$

また $F \in Nb_i(Z)$ だから、$x \in Z$ に対しては $\delta_\epsilon(x)$ を、任意の (δ_ϵ, Z)-細仕切りに対して

$$\sum_{j=1}^{s} \big|F(b_j) - F(a_j)\big| \le \epsilon$$

となるようにとれる。

$\dot{\mathcal{P}} = \{([a_j, b_j], \xi_j)\}_{j=1}^{n}$ を I の δ_ϵ-細仕切りとし、$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i))$ に注意すると

$$\big|F(b) - F(a) - \sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f)\big| = \Big|\sum_{i=1}^{n}[F(b_i) - F(a_i) - f(\xi_i)(b_i - a_i)]\Big|$$

となる。$\xi_i \in Z$ では $f(\xi_i) = 0$ となるから、上の等式の足し算を分割して

$$\begin{aligned} &\le \sum_{\xi_i \in Z} \big|F(b_i) - F(a_i)\big| + \sum_{\xi_i \in I \setminus Z} \big|F(b_i) - F(a_i) - f(\xi_i)(b_i - a_i)\big| \\ &\le \epsilon + \sum_{\xi_i \in I \setminus Z} \epsilon(b_i - a_i) \le \epsilon(1 + b - a). \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ かつ $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ となる。任意の $[a, x] \subset I$ に対しても同様に議論できる。　□

5 収束定理

5.1 階段関数、統制的関数

定義 5.1.1 *(i)* $s : I \to \mathbb{R}$ が $I = [a, b]$ 上の <u>階段関数 *(step function)*</u> とは、I の分割 $\{[c_{i-1}, c_i]\}_{i=1}^{n}$ と実数列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ があって

$$x \in (c_{i-1}, c_i),\ (i = 1, \cdots, n) \quad \text{に対して} \quad s(x) = \varphi_i, \quad i.e. \quad s(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \chi_{(c_{i-1}, c_i)}(x)$$

となることである。

(ii) 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $I = [a, b]$ 上で <u>統制的 *(regulated)*</u> であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し階段関数 $s_\epsilon : I \to \mathbb{R}$ で

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| \le \epsilon \quad for \quad x \in I$$

なるものが存在することである。

注意：Lebesgue 積分論で用いられる <u>単関数 (simple function)</u> とは、Lebesgue 可測かつその関数値が有限集合をなす関数のことである。

定理 5.1.1 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $I = [a, b]$ 上で統制的ならば $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。

証明：任意の $\epsilon > 0$ に対して階段関数 $s_\epsilon : I \to \mathbb{R}$ で $|f(x) - s_\epsilon(x)| \le \epsilon$, $x \in I$ となるものが存在する。故に

$$s_\epsilon - \epsilon \le f(x) \le s_\epsilon + \epsilon \quad \text{for} \quad x \in [a, b]$$

そこで、$\varphi_\epsilon(x) = s_\epsilon - \epsilon$、$\psi_\epsilon(x) = s_\epsilon + \epsilon, x \in I$ とおくと、階段関数 φ_ϵ、ψ_ϵ は可積分で $\varphi_\epsilon(x) \le f(x) \le \psi_\epsilon(x)$ を満たす。更に、

$$\int_a^b (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) d\varphi = 2\epsilon \int_a^b d\varphi = 2\epsilon(\varphi(b) - \varphi(a))$$

だから、11 月 19 日にやった Squeeze 定理により $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$。 □

定理 5.1.2 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $I = [a,b]$ 上で統制的なる必要十分条件はすべての $x \in I$ で右極限、左極限を持つことである。

証明：(この証明は講義中にはやらず、演習問題とした)
$\Longrightarrow$):明らかに、任意の階段関数は、すべての点で一方向からの極限を持つ。さて、任意の点 $c \in [a,b)$ に対して f は c で右極限を持つことを示そう。任意の $\epsilon > 0$ に対して階段関数 $s_\epsilon : I \to \mathbb{R}$ で $|f(x) - s_\epsilon(x)| \le \epsilon x \in I$ となるものが存在する。s_ϵ は階段関数だから、極限 $\lim_{x \to c+0} s_\epsilon(x)$ が存在するので、$\delta_\epsilon(c) > 0$ があって $x, y \in (c, c + \delta_\epsilon(c))$ ならば $s_\epsilon(x) = s_\epsilon(y)$ である。故に、$x, y \in (c, c + \delta_\epsilon(c))$ に対し

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - s_\epsilon(x)| + |s_\epsilon(x) - s_\epsilon(y)| + |s_\epsilon(y) - f(y)| \le \epsilon + 0 + \epsilon = 2\epsilon$$

となる。$\epsilon > 0$ は任意だったから、実数での Cauchy の判定条件により $\lim_{x \to c+0} f(x)$ が存在することが示された。$c \in (a,b]$ に対して同様の議論で極限 $\lim_{x \to c-0} s_\epsilon(x)$ が存在することも分る。

$\Longleftarrow$): I の全ての点 $t \in I$ で f が右、左極限を持つとする。これより、Cauchy の議論で、任意の $\epsilon > 0$ に対し I 上のゲージ δ_ϵ があって y_1, y_2 が共に $[t - \delta_\epsilon(t), t)$、或いは共に $(t, t + \delta_\epsilon(t)]$ に入っているならば $|f(y_1) - f(y_2)| \le \epsilon$ となる。

さて $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ を I の δ_ϵ-細 P 仕切りとする。z を目印点か分割点

$$a = x_0 \le t_1 \le \cdots \le x_{i-1} \le t_i \le x_i \le \cdots \le t_n \le x_n = b$$

とするとき、$s_\epsilon(z) = f(z)$ と定める。開区間 $(x_{i-1}, t_i) \subset [t_i - \delta_\epsilon(t_i), t_i)$ では、$s_\epsilon(x) = f(2^{-1}(x_{i-1} + t_i))$ と定めると、

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| = |f(x) - f(2^{-1}(x_{i-1} + x_i))| \le \epsilon.$$

同様に、開区間 $(t_i, x_i) \subset (t_i, t_i + \delta_\epsilon(t_i)]$ では、$s_\epsilon(x) = f(2^{-1}(t_i + x_i))$ と定めると、

$$|f(x) - s_\epsilon(x)| = |f(x) - f(2^{-1}(t_i + x_i))| \le \epsilon.$$

故に、階段関数 s_ϵ は全ての $x \in I$ で $|f(x) - s_\epsilon(x)| \le \epsilon$ を満たす。$\epsilon > 0$ は任意だったから、f は統制的である。
□

系 5.1.1 I 上の連続関数、単調関数は統制的、従って *HK* 積分可能である。

証明：連続関数及び単調関数は左右の極限を持つので、定理 5.1.2 より統制的である。故に、定理 5.1.1 より HK 積分可能である。 □

定理 5.1.3 I 上で統制的な関数の不連続点は I の高々可算集合である。

証明：(この証明は講義中にはやらず、演習問題とした)
各 $n \in \mathbb{N}$ に対して階段関数 $s_n : I \to \mathbb{R}$ があって

$$|f(x) - s_n(x)| \le 1/n \quad \text{for} \quad x \in I$$

となる。各 s_n の不連続点は有限集合 D_n だから、$D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ は I の可算集合である。$c \in I \setminus D$ とするとき、c は f の連続点であることを示す。任意の $\epsilon > 0$ に対して $N > 1/\epsilon$ となる N をとると、任意の $x \in I$ で $|f(x) - s_N(x)| \leq 1/N < \epsilon$ となる。s_N は c で連続だから、ある $\gamma > 0$ があって $|x - c| < \gamma$ かつ $x \in I$ ならば $|s_N(x) - s_N(c)| \leq \epsilon$ である。これらより、

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - s_N(x)| + |s_N(x) - s_N(c)| + |s_N(c) - f(c)| \leq 3\epsilon. \qquad \square$$

5.2 HK-積分での収束定理

定理 5.2.1 (The monotone convergence theorem) 以下を仮定する：

(i) 関数 $f_n(x) \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ は $[a,b]$ 上殆ど到る所で $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ であり $f(x)$ に収束し、

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = A$ とする。

このとき、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり、かつ $\int_a^b f = A$ となる。

証明：HK 積分の積分値は測度零集合での関数の振舞いに依存しないので、すべての点で $f_n(x)$ は $f(x)$ に収束すると仮定して一般性を失わない。$F_n(a,b) = \int_a^b f_n(x)$ とおく。すると、任意の $\epsilon > 0$ と各点 $\xi \in [a,b]$ に対し $m(\epsilon,\xi) \in \mathbb{N}$ があって

$$|f_{m(\epsilon,\xi)}(\xi) - f(\xi)| < \epsilon$$

となる。また、$f_n \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ より、f_n は原始関数 F_n を持ち $F_n(u,v) = F_n(v) - F_n(u)$ とおくと、Henstock の補題より正関数 $\delta_n(\xi) > 0$ と δ_n-細 P 仕切り $\dot{\mathcal{D}} = \{([u,v],\xi)\}$ があって

$$\sum \left|F_n(u,v) - f_n(\xi)(v-u)\right| < \epsilon 2^{-n}$$

となる。そこで $\xi \in [a,b]$ に対して $\delta(\xi) = \delta_{m(\epsilon,\xi)}(\xi)$ とおく。任意に δ-細 P 仕切り $\dot{\mathcal{D}} = \{([u,v],\xi)\}$ をとると

$$\begin{aligned}
|\sum f(\xi)(v-u) - A| &\leq \sum |f(\xi) - f_{m(\epsilon,\xi)}(\xi)|(v-u) \\
&\quad + \sum |f_{m(\epsilon,\xi)}(\xi)(v-u) - F_{m(\epsilon,\xi)}(u,v)| + |\sum F_{m(\epsilon,\xi)}(u,v) - A| \\
&< \epsilon(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} + |\sum F_{m(\epsilon,\xi)}(u,v) - A|
\end{aligned}$$

となる。故に最後の項を小さくとれれば良い。

数列 $\{F_n(u,v)\}$ は単調増加だからその極限がありそれを $F(u,v)$ と書こう。また、仕切り $\dot{\mathcal{D}}$ に随伴する点 $\{\xi\}$ は有限個であり対応する数 $\{m(\epsilon,\xi)\}$ も有限個である。p をそれら $\{m(\epsilon,\xi)\}$ の最小値とすると、

$$F_p(a,b) = \sum F_p(u,v) \leq \sum F_{m(\epsilon,\xi)}(u,v) \leq \sum F(u,v) = F(a,b) = A.$$

一方仮定 (ii) より整数 m_0 があって

$$0 \leq A - F_m(a,b) < \epsilon \quad (m \geq m_0)$$

となる。整数 $m(\epsilon,\xi)$ を $m(\epsilon,\xi) \geq m_0$ なるように選んでおけば

$$|\sum F_{m(\epsilon,\xi)}(u,v) - A| \leq A - F_p(a,b) < \epsilon. \qquad \square$$

補題 5.2.1 $f_1, f_2, g, h \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ とし、I 上殆ど至る所で $g(x) \leq f_i(x) \leq h(x) (i = 1,2)$ とする。このとき $\max\{f_1,f_2\}, \min\{f_1,f_2\} \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となる。ここで、$\max\{f_1,f_2\}(x) = \max\{\{f_1(x), f_2(x)\}$ $(a.e.\, x \in I)$ 等という意味である。

証明：$F_i(u,v)=\int_u^v f_i$ とおく。まず $g(x)=0,\ x\in I$ と仮定する。$F^*(u,v)=\max\{F_1(u,v),F_2(u,v)\}$ とすると F^* は区間に関し加法的ではないが、$x<y<z$ に対し

$$F^*(x,z)\le F^*(x,y)+F^*(y,z)$$

となる。任意の I の分割 $\mathcal{D}=\{[u,v]\}$ に対し

$$0\le\sum_{\mathcal{D}}F^*(u,v)\le\int_a^b h$$

となる。これより $A=\sup_{\mathcal{D}}\sum_{\mathcal{D}}F^*(u,v)$ とおくとき、$A=\int_a^b\max\{f_1,f_2\}$ なることを示す。

任意の $\epsilon>0$ に対し、ある $\delta(\xi)>0$ があって、任意の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}=\{([u,v],\xi)\}$ に対し

$$\sum\big|f_i(\xi)(v-u)-F_i(u,v)\big|<\epsilon,\quad i=1,2$$

となる。そこで $[x,y]$ の任意の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}'=\{([u,v],\xi)\}$ に対する上限

$$\chi_i(x,y)=\sup\sum\big|f_i(\xi)(v-u)-F_i(u,v)\big|$$

をとる。$x<y<z$ に対し

$$\chi_i(x,y)+\chi_i(y,z)\le\chi_i(x,z)$$

であり $\chi_i(a,b)<\epsilon$ なることを注意する。I 上の任意の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}=\{([u,v],\xi)\}$ に対し

$$f_i(\xi)(v-u)\le F^*(u,v)+\chi_1(u,v)+\chi_2(u,v)\quad i=1,2.$$

$f=\max\{f_1,f_2\}$ とおくと

$$f(\xi)(v-u)\le F^*(u,v)+\chi_1(u,v)+\chi_2(u,v)\quad i=1,2$$

であり、同様に

$$F^*(u,v)-\chi_1(u,v)-\chi_2(u,v)\le f(\xi)(v-u).$$

これらを用いると

$$\sum\big|f(\xi)(v-u)-F^*(u,v)\big|<2\epsilon.$$

A に対し

$$\sum_1 F^*(u,v)\ge A-\epsilon$$

となる分割 $\mathcal{D}_1=\{[u,v]\}$ をとる。

$\dot{\mathcal{D}}$ のどんな部分区間も、$\mathcal{D}_1$ のどれかの部分区間に入るように関数 δ を修正して δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}$ が $\mathcal{D}_1$ より細かくなるようにする。するとこの δ-細仕切り $\dot{\mathcal{D}}$ に対して

$$0\le A-\sum F^*(u,v)\le A-\sum_1 F^*(u,v)<\epsilon$$

となる。上で得た不等式から

$$\sum\big|f(\xi)(v-u)-A\big|<3\epsilon.$$

即ち、$g=0$ なるときについて結論が示された。

g が一般の場合は、$0 \le \max\{f_1 - g, f_2 - g\} \le h - g$ に注意すれば $\max\{f_1 - g, f_2 - g\}$ が HK 積分可能である。これより

$$\max\{f_1 - g, f_2 - g\} = \max\{f_1, f_2\} - g$$

を用いれば $\max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。

$\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\}$ より $\min\{f_1, f_2\} \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。 $\square$

重要な注意：上の補題の条件 $g(x) \le f_i(x) \le h(x)$ は落とせない。もしこの条件無しで結論が成立するとすると $|f| = \max\{f, -f\}$ だから $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ ならば $|f| \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となり、これは一般には偽である。

定理 5.2.2 (The dominated convergence theorem) 以下を仮定する：

(i) 関数 $f_n(x) \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ は $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f(x)$ に収束し、

(ii) 関数 $g, h \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ で $[a, b]$ 上殆ど到る所で $g(x) \le f_n(x) \le h(x)$ である。
このとき、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

証明：i を一つ取り、$j = i, i+1, \cdots$ に対して上の補題から $f_j^* = \min_{i \le n \le j}\{f_n\} \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。$-f_i^*$, $-f_{i+1}^*, \cdots$ は単調増加でそれらの積分は上から有界である。単調収束定理から $\inf_{n \ge i}\{f_n\}$ は HK 積分可能である。同様に $\sup_{n \ge i}\{f_n\}$ も HK 積分可能である。これより

$$\int_a^b (\inf_{n \ge i}\{f_n\}) \le \inf_{n \ge i} \int_a^b f_n \le \sup_{n \ge i} \int_a^b f_n \le \int_a^b (\sup_{n \ge i}\{f_n\}).$$

また

$$f_n(x) \to f(x) \Longleftrightarrow \lim_{i\to\infty} (\inf_{n \ge i}\{f_n\}) = f(x) = \lim_{i\to\infty} (\sup_{n \ge i}\{f_n\})$$

となるから、再度単調収束定理を $\inf_{n \ge i}\{f_n\} i = 1, 2, \cdots$ に対して適用して f も HK 積分可能であり、

$$\int_a^b f \le \lim_{i\to\infty} (\inf_{n \ge i}\{f_n\}) \le \lim_{i\to\infty} (\sup_{n \ge i}\{f_n\}) \le \int_a^b f. \qquad \square$$

定義より $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{i\to\infty} (\inf_{n \ge i} a_n)$ だから、

系 5.2.1 (Fatou's lemma) 関数列 $\{f_n\}$ が $[a, b]$ 上 *HK*-積分可能で $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f(x)$ に収束し、$\sup_n \int_a^b f_n < \infty$ とする。このとき、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり

$$\int_a^b f \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

系 5.2.2 (The mean convergence theorem) 以下を仮定する：

(i) 関数 $f_n(x) \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ は $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f(x)$ に収束し、

(ii) $\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b |f_n - f_m| = 0$ とする。

このとき、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり、かつ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - f_n| = 0.$$

証明：(ii) より部分列 $n(1) < n(2) < \cdots$ を

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_a^b |f_{n(i)} - f_{n(i+1)}| < 2^{-i} \quad i = 1, 2, \cdots$$

なるように取る。

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n(i)}(x) - f_{n(i+1)}(x)|$$

とすると、この右辺は a.e. で収束し、単調収束定理より $g \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となる。$f_{n(1)} - g \le f_{n(i)} \le f_{n(1)} + g$ となるから再度単調収束定理より $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となる。そこで Fatou の補題を用いて

$$\int_a^b |f - f_n| \le \liminf_{m\to\infty}\int_a^b |f_m - f_n|$$

となることより、結論が従う。　□

＝＝＝＝＝＝

メモ：『積分値が一意的に決まること』をどう示すのかという質問があった。第 1 回目の講義で RS 積分可能（=Riemann-Stieltjes integrable）ならば、一意的な実数 $I_\varphi(f)$ があって任意の分割 $\Delta \in \mathfrak{D}$ に対し

$$L(f, \varphi, \Delta) \le I_\varphi(f) \le U(f, \varphi, \Delta)$$

となることに言及した。何故一意的な実数 $I_\varphi(f)$ があるといえるのか？それを証明することを推奨しておいた。もし次回の講義時に分らない人がいたら説明する予定である。

有界収束定理の応用例について：また、Riemann 積分の時は以下の例が知られていた。$I = [0, 1]$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 3\text{ 点 } (0,0),\ \left(\dfrac{1}{n}, 0\right),\ \left(\dfrac{1}{2n}, 1\right) \text{ を結ぶ折れ線}, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

と定める。このとき $f_n(x)$ は I 上 0 に一様収束しないが、$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2n}$ であり

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

となる。この「関数列 $\{f_n\}$ は I 上各点収束するが一様収束はしない。しかし対応する積分値は収束する」という現象を、どう解釈したら良いのか？$\longrightarrow$ 今まではこれの解消法は L 積分（=Lebesgue integration）とされてきたが、本日の収束定理でも説明できている！

5.3 M-積分の定義

定義 5.3.1 $\mathcal{P} = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ $(I_i = [x_{i-1}, x_i])$ が $I = [a, b]$ の仕切りであるとは、$I = \cup_{i-1}^n I_i$ で、任意の $i \ne j$ に対し $(I_i \cap I_j)^\circ = \emptyset$ であり、かつ $\underline{\xi_i \in \mathbb{R}}$ なる事を言う。更に正の関数 δ をとるとき、この仕切り $\mathcal{P}$ が δ-細とは、任意の $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し $[x_{i-1}, x_i] \in U(\xi_i, \delta(\xi_i))$ となることである。

定義 5.3.2 φ を I 上で増加関数とする。関数 f が I 上で M-積分可能とは、ある数 A があって、任意の $\epsilon > 0$ に対して正関数 δ があって、I の任意の δ-細仕切り $\mathcal{P}$ に対して

$$|\sigma(f, \mathcal{P}; \varphi) - A| < \epsilon$$

となることである。このとき $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I;\varphi)$ と書き、$A = \int_I f d\varphi$ と表示する。特に $\varphi(x) = x = \lambda(x)$ のときは、単に $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$、$A = \int_I f$ と表示する。

補題 5.3.1 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I;\varphi)$ となる必要十分条件は、任意の $\epsilon > 0$ に対し正の関数 $\delta > 0$ があって I の任意の δ-細仕切り $\mathcal{P} = \{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ と $\mathcal{Q} = \{(I_i,\eta_i)\}_{i=1}^n$ に対し

$$\left|\sigma(f,\mathcal{P};\varphi) - \sigma(f,\mathcal{Q};\varphi)\right| < \epsilon. \tag{4}$$

証明：($\Longleftarrow$) 任意の $\epsilon > 0$ に対し上の条件(4) を満たす正関数 δ をとる。I の任意の δ-細仕切り $\mathcal{P} = \{(B_i,u_i)\}_{i=1}^p$ と $\mathcal{Q} = \{(C_j,v_j)\}_{j=1}^q$ をとり、

$$A_{i,j} = B_i \cap C_j, \quad \xi_{i,j} = u_i,\ \eta_{i,j} = v_j$$

と定める。$N = \{(i,j) \mid (A_{i,j})^\circ \neq \emptyset\}$ に対して

$$\mathcal{R} = \{(A_{i,j},\xi_{i,j}) \mid (i,j) \in N\}, \quad \mathcal{S} = \{(A_{i,j},\eta_{i,j}) \mid (i,j) \in N\}$$

とすると、これらは I の δ-細仕切りである。明らかに

$$\begin{aligned}\sigma(f,\mathcal{R};\varphi) &= \sum_{(i,j)\in N} f(\xi_{i,j})\varphi(A_{i,j}) = \sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^q f(\xi_{i,j})\varphi(A_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^p f(u_i)\sum_{j=1}^q \varphi(B_i \cap C_j) = \sum_{i=1}^p f(u_i)\varphi(B_i) = \sigma(f,\mathcal{P};\varphi).\end{aligned}$$

同様に $\sigma(f,\mathcal{S};\varphi) = \sigma(f,\mathcal{Q};\varphi)$ となるから

$$\left|\sigma(f,\mathcal{P};\varphi) - \sigma(f,\mathcal{Q};\varphi)\right| = \left|\sigma(f,\mathcal{R};\varphi) - \sigma(f,\mathcal{S};\varphi)\right| < \epsilon.$$

故に、Cauchy の判定条件により $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I;\varphi)$.
($\Longrightarrow$) は明らか。 □

補題 5.3.2 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I;\varphi)$ となる必要十分条件は、任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって I の任意の δ-細仕切り $\mathcal{P} = \{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ と $\mathcal{Q} = \{(I_i,\eta_i)\}_{i=1}^n$ に対し

$$\sum_{i=1}^n \left|f(\xi_i) - f(\eta_i)\right|\varphi(I_i) < \epsilon.$$

証明：($\Longrightarrow$)$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I;\varphi)$ とし、任意の $\epsilon > 0$ に対し補題 5.3.1 の条件を満たす正関数 δ をとる。仕切りを細かく取ることにより δ-細仕切りとして

$$\mathcal{P} = \{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n, \quad \mathcal{Q} = \{(I_i,\eta_i)\}_{i=1}^n$$

を考えれば良い。目印点の番号を付け替えることにして、ある数 $k(0 \le k \le n)$ があって、$i = 1,\cdots,k$ では $f(\xi_i) \ge f(\eta_i)$ であり、$i = k+1,\cdots,n$ では $f(\xi_i) < f(\eta_i)$ と仮定して良い。そこで

$$\mathcal{R} = \{(I_1,\xi_1),\cdots,(I_k,\xi_k),(I_{k+1},\eta_{k+1}),\cdots,(I_n,\eta_n)\}, \quad \mathcal{S} = \{(I_1,\eta_1),\cdots,(I_k,\eta_k),(I_{k+1},\xi_{k+1}),\cdots,(I_n,\xi_n)\}$$

をとれば、これらは δ-細仕切りであり

$$\begin{aligned}\epsilon > \left|\sigma(f,\mathcal{P};\varphi) - \sigma(f,\mathcal{Q};\varphi)\right| &= \sum_{i=1}^k [f(\xi_i) - f(\eta_i)]\varphi(I_i) + \sum_{i=k+1}^n [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\varphi(I_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left|f(\xi_i) - f(\eta_i)\right|\varphi(I_i).\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) 補題 5.3.1 より従う。 □

命題 5.3.1 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ ならば、$|f| \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ であり、

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

証明：$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq \big|f(x) - f(y)\big|$ であるから、補題 5.3.2 より $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ ならば、$|f| \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ が従う。また、不等式も明らかであろう。　□

系 5.3.1 $f, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ ならば、$\min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ である。

証明：($\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ のときはこうはならない！)

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \qquad \square$$

また、$f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$ に注意すれば

系 5.3.2 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I) \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$

注意：M-積分に関しての各種の性質はほぼ HK-積分の時と同様に示されるが、ここでは詳細しない。実は M-積分は McShane によって Kurzweil や Henstock の後に提唱されたもので、Lebesgue 積分と同等であることが示されている。

5.4 部分積分公式

定理 5.4.1 　φ は $I = [a, b]$ 上で増加関数、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I; \varphi)$ とする。各 $x \in [a, b]$ に対し $F(x) = \int_a^x f d\varphi$ とおく。もし I 上で F が連続で、G は増加ならば、$fG \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I; \varphi)$ かつ $F \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I; G)$ であり、更に

$$\int_a^b fG d\varphi = F(b)G(b) - \int_a^b F dG.$$

証明：F は I 上で連続より一様連続、即ち、任意の $\epsilon > 0$ に対して正定数 $\Delta > 0$ があって $x, y \in I$, $|x - y| < 2\Delta$ なるとき $|F(x) - F(y)| < \epsilon$ である。これより、$F \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I; G)$ なることは示される[28]。Henstock の補題から正関数 δ があって δ-細 P 仕切り $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^p$ に対し

$$\sum_{i=1}^p \big|f(\xi_i)\varphi(I_i) - F(I_i)\big| < \epsilon$$

となる。$\delta \leq \Delta$ なるように取ることができるから、任意の δ-細 P 仕切り $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^p$ に対し

$$\left|\sigma(F, \dot{\mathcal{P}}; G) - \int_a^b F dG\right| < \epsilon$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} F(b)G(b) &= \sum_{i=1}^p [F(x_i)G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^p \big(G(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + F(x_i)(G(x_i) - G(x_{i-1}))\big) \end{aligned} \tag{5}$$

[28] HK 積分のときの証明の仕方を真似してやってみよう

となるから、

$$
\begin{aligned}
&\left|\sigma(fG,\dot{\mathcal{P}};\varphi)+\sigma(F,\dot{\mathcal{P}};G)-F(b)G(b)\right| \\
&\quad=\left|\sum_{i=1}^{p}\big(f(\xi_i)G(\xi_i)\varphi(I_i)+F(\xi_i)G(I_i)-G(x_{i-1})F(I_i)-F(x_i)G(I_i)\big)\right| \\
&\quad=\left|\sum_{i=1}^{p}\big(f(\xi_i)G(\xi_i)\varphi(I_i)-G(\xi_i)F(I_i)+(G(\xi_i)-G(x_{i-1}))F(I_i)+(F(\xi_i)-F(x_i))G(I_i)\big)\right| \\
&\quad\le\sum_{i=1}^{p}|G(\xi_i)|\Big|f(\xi_i)\varphi(I_i)-F(I_i)\Big|+\sum_{i=1}^{p}\big|G(\xi_i)-G(x_{i-1})\big|F(I_i)+\sum_{i=1}^{p}\big|F(\xi_i)-F(x_i)\big|G(I_i) \\
&\quad\le\epsilon G(b)+\epsilon\sum_{i=1}^{p}\big|G(\xi_i)-G(x_{i-1})\big|+\epsilon\sum_{i=1}^{p}\big|G(\xi_i)-G(x_{i-1})\big| \\
&\quad\le\epsilon(G(b)+2G(I)).
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\left|\sigma(fG,\dot{\mathcal{P}};\varphi)+\int_a^b FdG-F(b)G(b)\right| &\le \left|\sigma(F,\dot{\mathcal{P}};G)-\int_a^b FdG\right| \\
&+\left|\sigma(fG,\dot{\mathcal{P}};\varphi)+\sigma(F,\dot{\mathcal{P}};G)-F(b)G(b)\right|<\epsilon(1+G(b)+2G(I)) \qquad \square
\end{aligned}
$$

定理 5.4.2 φ は $I=[a,b]$ 上で増加関数、$f,g\in\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I;\varphi)$ とする。各 $x\in[a,b]$ に対し $F(x)=\int_a^x fd\varphi$, $G(x)=\int_a^x gd\varphi$ とおく。I 上で、F,G が連続ならば、$fG+Fg$ は $\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I;\varphi)$ に属し

$$\int_a^b (fG+Fg)d\varphi=F(b)G(b).$$

証明：C を $\max_I|F|,\max_I|G|,\varphi(I)=\varphi(b)-\varphi(a)\le C$ とし、任意の $\epsilon>0$ に対し正関数 δ を以下の 2 つを満たすように取る：I 上の任意の ξ,x が $|x-\xi|<\delta(\xi)$ を満たすとき

$$|f(\xi)||G(\xi)-G(x)|\le\frac{\epsilon}{4C},\quad |g(\xi)||F(\xi)-F(x)|\le\frac{\epsilon}{4C},$$

更に、任意の δ-細仕切り $\dot{\mathcal{P}}=\{(I_i,\xi_i)\}(I_i=[x_{i-1},;x_i])$ に対し

$$\sum_{i=1}^{p}\big|f(\xi_i)\varphi(I_i)-F(I_i)\big|<\frac{\epsilon}{4C},\quad \sum_{i=1}^{p}\big|g(\xi_i)\varphi(I_i)-G(I_i)\big|<\frac{\epsilon}{4C}.$$

このとき(5) を用い、

$$
\begin{aligned}
&\left|\sigma(fG+Fg,\dot{\mathcal{P}};\varphi)-F(b)G(b)\right| \\
&\quad\le\sum_{i=1}^{p}\big|f(\xi_i)G(\xi_i)\varphi(I_i)-G(x_{i-1})F(I_i)\big|+\sum_{i=1}^{p}\big|F(\xi_i)g(\xi_i)\varphi(I_i)-F(x_i)G(I_i)\big| \\
&\quad\le\sum_{i=1}^{p}|G(x_{i-1})|\big|f(\xi_i)\varphi(I_i)-F(I_i)\big|+\sum_{i=1}^{p}|f(\xi_i)||G(\xi_i)-G(x_{i-1})|\varphi(I_i) \\
&\quad+\sum_{i=1}^{p}|F(x_i)||g(\xi_i)\varphi(I_i)-G(I_i)|+\sum_{i=1}^{p}|g(\xi_i)||F(\xi_i)-F(x_i)|\varphi(I_i)<2[C\frac{\epsilon}{4C}+\frac{\epsilon}{4C}\varphi(I)]\le\epsilon
\end{aligned}
$$

5.5 積分記号下での変数変換則

積分記号下での変数変換則は、合成関数の微分則の逆演算であるが、積分する時は少しぐらい変な点があっても「目につかなくなる」場合があることが微分積分学の基本定理の教えるところであった。まずは、少し例を計算してみよう。

例 1: $n \neq -1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^n x dx$ を求めよ。
この例では、被積分関数が $g(\sigma(x))\sigma'(x)$ となる変数変換 $t = \sigma(x)$ を見い出すことが易しい。実際、$g(x) = (x^2+1)^n$ $t = \sigma(x) = x^2+1$ とおくと $dt = 2xdx$、$g(\sigma(x))\sigma'(x) = \frac{1}{2}t^n dt$ で

$$\int_0^1 (x^2+1)^n x dx = \int_1^2 \frac{1}{2} t^n dt = \frac{1}{2}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{2(n+1)}.$$

例 2:$\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^{-3/2} dx$ を求めよ。
この例では、上のものと違って、$x = \tau(t)$ なる変数変換を用いる（その意味で上の計算例を逆に辿っている）。$x = \tau(t) = \tan t$ とおくと $dx = \sec^2 t dt$ で

$$\int_0^1 (x^2+1)^{-3/2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 t dt}{(\tan^2 t+1)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = 1/\sqrt{2}.$$

上の計算例と微分積分学の基本定理より

定理 5.5.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^q$ を与えられた関数とする。$\sigma : [a,b] \to H$ と $g : H \to \mathbb{R}^q$ があって $[a,b]$ 上の可算個の点を除いては $f(x) = g(\sigma(x))\sigma'(x)$ が成り立つと仮定する。更に、g は $\bar{\mathbb{R}}$ の区間 H 上で原始関数 G を持ち、$G \circ \sigma$ は $[a,b]$ 上で $(g \circ \sigma)\sigma'$ の原始関数となると仮定する。

このとき $\int_a^b f$ が存在し

$$\int_a^b f = \int_a^b (g \circ \sigma)\sigma' = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} g.$$

例 3:$\displaystyle\int_0^\infty x^{-2}e^{-1/x} dx$ を求めよ。
ここでは、

$$\sigma(x) = \begin{cases} x^{-1} & 0 < x < \infty, \\ \infty & x = 0, \\ 0 & x = \infty, \end{cases} \qquad G(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < \infty, \\ 0 & t = \infty \end{cases}$$

とおくと、$(0,\infty)$ 上で $(G \circ \sigma)' = (g \circ \sigma)\sigma'$ であり、G は $[0,\infty]$ 上で連続である。故に、$G \circ \sigma$ は $[0,\infty]$ 上で原始関数になっている。即ち、$t = x^{-1}$ とおくと $dt = -x^{-2}dx$ で

$$\int_0^\infty x^{-2}e^{-1/x} dx = \int_\infty^0 (-e^{-t}) dt = e^{-t}\Big|_\infty^0 = 1.$$

これらの例より、以下が成立することが分かる。

定理 5.5.2 関数 $\sigma : [a,b] \to H$ は $[a,b]$ 上で連続で、可算集合 C を除いた $[a,b] \setminus C$ 上で微分可能とする。関数 g の H 上での *cme*-原始関数 G が

(i) $[a,b]$ 上到る所で $G' = g$ となるか、

(ii) 各 t に対して $\{x \in [a,b] \mid \sigma(x) = t\}$[29]が可算集合ならば、

$(g \circ \sigma)\sigma'$ の *cme*-原始関数は $G \circ \sigma$ である。

[29]countable-to-one

証明：仮定より G は H 上で連続で、H の可算集合 K を除いて $G' = g$ となる。$E = \{x \in [a,b] \mid x \notin C,\ \sigma(x) \in K\}$ とおくと、高々$C \cup E$ を除くとそこでは $(G \circ \sigma)' = (g \circ \sigma)\sigma'$ が成立する。問題なのは E が可算集合かどうかである。(i) ならば $K = \emptyset$ であり、E は可算集合となる。もし $K = \emptyset$ でなくとも (ii) が成立すれば、E は可算集合となる。　　□

注意：C を可算集合とし、$\sigma : [a,b] \to \bar{\mathbb{R}}$ は $[a,b] \setminus C$ で微分可能、σ' は $[a,b] \setminus C$ 上至る所で零にならないならば $\{x \in [a,b] \mid \sigma(x) = t\}$ は可算集合となる。

例 2 では最初に $\int_c^d g$ が与えられ、変数変換 $x = \tau(t)$ で $g = (f \circ \tau)\tau'$ とおいたようになっているが、f の原始関数で代入によって得られるものを見つけだすのは容易ではない。しかし、f の原始関数の存在自身は基本定理で保証されている。この場合、以下が成立する。

定理 5.5.3 $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b])$ とし可算集合 C を除いた $[a,b] \setminus C$ 上で連続とする。$\tau : [c,d] \to [a,b]$ が $[c,d]$ 上で連続で、可算個の点以外で $\tau'(t) \neq 0$ とするならば

$$\int_{\tau(c)}^{\tau(d)} f = \int_c^d (f \circ \tau)\tau'.$$

別の考え方として、基本定理を使わずに積分の定義自身に戻る方法もある。即ち、変数変換 τ の如何なる性質が f に関する Riemann 和と $(f \circ \tau)\tau'$ に関する Riemann 和とを関係付けるのか？

定理 5.5.4 可算個の点以外で $\tau'(t) \neq 0$ とするならば

$$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b]) \Longleftrightarrow (f \circ \tau)\tau' \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([c,d]).$$

証明：

5.6　定理 5.6 の証明

定義 5.6.1 (Vitali 被覆) $E \subset [a,b]$ とし、$[a-1, b+1]$ の部分閉区間の集まりを $\mathcal{F}$ とする。$\mathcal{F}$ が E の *Vitali covering(被覆)* とは、任意の $x \in E$ と任意の $s > 0$ に対し区間 $J \in \mathcal{F}$ で $x \in J$ かつ $0 < \ell(J) < s$ となるものが存在することを言う。

定理 5.6.1 (Vitali 被覆定理) $E \subset [a,b]$ に対し $\mathcal{F}$ をそれの *Vitali* 被覆とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し互いに疎な $\mathcal{F}$ の区間 $I_1, \cdots, I_p$ と $\mathbb{R}$ の可算個の閉区間 $\{J_i : i = p+1, \cdots\}$ があって

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^{p} I_i \subset \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i, \quad \sum_{i=p+1}^{\infty} \ell(J_i) \leq \epsilon$$

となる。即ち、

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i.$$

証明：$I_1 \in \mathcal{F}$ を任意にとり、$\mathcal{F}$ から互いに疎な $I_2, \cdots, I_r$ が取れたと仮定する。$E \subset \cup_{i=1}^{r} I_i$ ならば $J_i = \emptyset i \geq r+1$ ととれば結論は示される。そうでないとき、$\mathcal{F}$ の元 I で、E の点を含み、区間 $I_1, I_2, \cdots, I_r$ とは互いに疎なもの全体を $\mathcal{F}_r$ と書く。$\lambda_r = \sup_{I \in \mathcal{F}_r} \ell(I) \leq b - a + 2$ とおき、$I_{r+1} \in \mathcal{F}_r$ を $\ell(I_{r+1}) > \lambda_r/2$ ととる。この操作はもしこれらの有限個の和集合が E を含まないならば、無限回続けることができる。とこ

ろで、もし無限個の区間 $\{I_i\}$ が出来たとする。この区間は互いに疎で区間 $[a-1,b+1]$ に含まれているので $\sum_{i=1}^{\infty}\ell(I_i)\le b-a+2$ となる。これより、任意の $\epsilon>0$ に対してある数 $p\in\mathbb{N}$ があって $\sum_{i=p+1}^{\infty}\ell(I_i)\le\epsilon/5$ となる。$D_p=E\setminus\cup_{i=1}^{p}I_i$ とし任意の $x\in D_p$ をとる。$\mathcal{F}$ は E の Vitali 被覆だから、$I_x\in\mathcal{F}$ があって $x\in I_x$ かつ $I_x\cap I_i=\emptyset$（$i=1,\cdots,p$）となる、即ち、$I_x\in\mathcal{F}_p$。この区間 I_x は少なくとも一つの $I_n(n>p)$ と交わることを主張する。もし $I_x\cap I_i=\emptyset(i=1,\cdots,n)$ とすると、$I_x\in\mathcal{F}_n$ であり $0<\ell(I_x)\le\lambda_n$ である。しかし、$0\le\lambda<2\ell(I_{n+1})$ だから $\lim_n\lambda_n=0$ である。故に、$0<\ell(I_x)\le\lambda_n$ が全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して成立することはない。即ち、$n(x)\in\mathbb{N}$ を $I_x\cap I_n\ne\emptyset$ かつ $n>p$ なる n とすると、$I_x\in\mathcal{F}_{n(x)-1}$ だから $\ell(I_x)\le\lambda_{n(x)-1}<2\ell(I_{n(x)})$ となる。I_x は $x\in D_p$ を含み $I_{n(x)}$ の点をもつので、x から $I_{n(x)}$ の中点 $x_{n(x)}$ への距離は $\le\ell(I_x)+\frac{1}{2}\ell(I_{n(x)})<\frac{5}{2}\ell(I_{n(x)})$ である。$I_{n(x)}$ の中点 $x_{n(x)}$ と同じ中点をもつ区間でその長さが 5 倍の区間 $J_{n(x)}$ に x は含まれる。$i\ge p+1$ に対し J_i を I_i から同様に作る。$x\in D_p$ は任意の点だったから

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{p}I_i=D_p\subset\bigcup_{i=p+1}^{\infty}J_i$$

$i>p$ に対し $\ell(J_i)=5\ell(I_i)$ だから $\sum_{i=p+1}^{\infty}\ell(J_i)\le\epsilon$ となる。　　$\square$

定理の証明：以降 f の不定積分 $F(x)=\int_a^x f$ の基点は a とする。
$\lim_{h\to0+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ が存在する時、それを F の x での右微分といい $F'_+(x)$ と書く。

$$E_+=\{x\in[a,b)\mid F \text{ の } x \text{ での右微分が存在しないか、存在しても } F'_+(x)\ne f(x)\}$$

と定義し、同様に $E_-=\{x\in[a,b)\mid F$ の x での左微分が存在しないか、存在しても $F'_-(x)\ne f(x)\}$ とおく。

$x\in E_+$ ならば $\alpha(x)>0$ があり、任意の $s>0$ に対し $x<v_{x,s}<x+s$ となる $v_{x,s}\in I$ があって

$$\left|\frac{F(v_{x,s})-F(x)}{v_{x,s}-x}-f(x)\right|>\alpha(x)$$

となる。故に

$$\big|[F(v_{x,s})-F(x)]-f(x)(v_{x,s}-x)\big|>\alpha(x)(v_{x,s}-x). \tag{6}$$

固定した $n\in\mathbb{N}$ に対し $E_{n+}=\{x\in E_+\mid\alpha(x)>1/n\}$ とおく。任意の $\epsilon>0$ に対し、f は HK 可積分だから、I 上のゲージ δ_ϵ があって、任意の δ_ϵ-細仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ に対し

$$\Big|\sigma(f;\dot{\mathcal{P}})-\int_I f\Big|\le\epsilon/n \tag{7}$$

となる。$\mathcal{F}_n=\{[x,v_{x,s}]\mid x\in E_{n+},\ 0<s\le\delta_\epsilon(x)\}$ とおくと、$\mathcal{F}_n$ は E_{n+} の Vitali 被覆を成す。Vitali 被覆定理より、有限個の区間 $I_1=[x_1,v_1],\cdots,I_p=[x_p,v_p]$ と閉区間列 $(J_i)_{i=p+1}^{\infty}$ があって

$$E_{n+}\subset\bigcup_{i=1}^{p}I_i\cup\bigcup_{i=p+1}^{\infty}J_i,\qquad\sum_{i=p+1}^{\infty}\ell(J_i)\le\epsilon \tag{8}$$

となる。そこで以下の和を考える。

$$\sum_{i=1}^{p}\left|f(x_i)(v_i-x_i)-\int_{x_i}^{v_i}f\right|=\sum_{i=1}^{p}\big|f(x_i)(v_i-x_i)-[F(v_i)-F(x_i)]\big|. \tag{9}$$

$\alpha(x_i)\ge1/n$ とすると、(6) を用いて(9) の右辺は $(1/n)\sum_{i=1}^{p}(v_i-x_i)$ で上から評価される。一方、$x_i\le v_i\le x_i+\delta_\epsilon(x_i)(i=1,\cdots,p)$ だから、$\{(I_i,x_i)\}_{i=1}^{p}$ は δ_ϵ-細仕切りをなし、(7) が成立する。Saks-Henstock の補題 **??**から、(9) は $\le2\epsilon/n$ と評価される。だから、

$$\sum_{i=1}^{p}(v_i-x_i)\le n\sum_{i=1}^{p}\left|f(x_i)(v_i-x_i)-\int_{x_i}^{v_i}f\right|\le2\epsilon$$

となる。(8) より E_{n+} は全長が 3ϵ 以下の可算区間で被える。ϵ は任意だったから E_{n+} は零集合である。更に、$E_+=\cup_{n=1}^{\infty}E_{n+}$ も零集合である。　　$\square$

高次元版 Vitali 被覆定理　(Evans-Gariepy[3] より)

定義 5.6.2 *(i)* $\mathbb{R}^n$ の非退化な閉球の集まり $\mathcal{F}$ が、$A \subset \cup_{B\in\mathcal{F}} B$ を満たすとき、集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の被覆であるという。*(ii)* $\mathcal{F}$ が A の細被覆であるとは、更に、任意の $x \in A$ に対し $\inf\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} = 0$ となることである。

定理 5.6.2 (Vitali 被覆定理) $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^n$ の非退化な閉球の集まりで

$$\sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty$$

なるものとする。このとき $\mathcal{F}$ の中の互いに疎な可算個の集まり $\mathcal{G}$ があって

$$\cup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \cup_{B\in\mathcal{G}} \hat{B} \quad 但し \quad B = U(x,r) \quad に対して \quad \hat{B} = U(x,5r),$$

となる。

系 5.6.1 $\mathcal{F}$ が閉球による A の細被覆で $\sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty$ を満たすものとする。このとき $\mathcal{F}$ の中の互いに疎な可算個の集まり $\mathcal{G}$ があって任意の有限個の $\{B_1, \cdots, B_m\} \subset \mathcal{F}$ に対し

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}\setminus\{B_1,\cdots,B_m\}} \hat{B}.$$

系 5.6.2 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と $\delta > 0$ をとる。U に含まれる互いに疎な可算個の閉球で $\operatorname{diam} \le \delta$ となるものの集まり $\mathcal{G}$ で

$$\mathcal{L}^n(U \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B) = 0$$

となるものがある。ここで $\mathcal{L}^n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の *Lebesgue* 測度である。

5.7　幾つかの注意

5.7.1　Lebesgue による Riemann 可積分関数の特徴付け

Titchmarsh の挙げた例：(１) $(0,1)$ 上で関数 x^{-a}（$0 < a < 1$）は（広義）Riemann 積分可能であるのみならず Lebesgue 積分可能であり、それらの値は一致する。実際（広義）Riemann 積分は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 x^{-a}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-a},$$

であり、非有界な関数の Lebesgue 積分の定義から、$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \{x \in [0,1] \mid f(x) < n\}, \\ n & \{x \in [0,1] \mid f(x) \ge n\}, \end{cases}$ として

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-a}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{n^{-1/a}} ndx + \int_{n^{-1/a}}^1 x^{-a}dx\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n^{1-1/a} + \left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_{n^{-1/a}}^1\right] = \frac{1}{1-a}.\end{aligned}$$

積分の定義の仕方が違うから、計算方法も異なっていることに、注目して欲しい。

（２）関数

$$f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \sin\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

は（広義）Riemann 積分可能だが Lebesgue 積分可能ではない。実際（広義）Riemann 積分は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} x^2\sin\frac{1}{x^2}\bigg|_{\epsilon}^{1} = \sin 1 - \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\sin\frac{1}{\epsilon^2} = \sin 1 - 0$$

と存在するが、

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \infty$$

だからである。実際、

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|dx &\geq \int_0^1 \left|\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|dx - \int_0^1 2x\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|dx \\ &\geq \int_{\epsilon}^{2/\sqrt{\pi}} \left|\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|dx - 1 \geq \log 4 - 2\log\pi - 2\log\epsilon - 1 \geq \infty.\end{aligned}$$

定義 5.7.1 f を $[a,b]$ 上で有界な関数とし、便宜上 $[a,b]$ 以外では 0 として拡張しておく。$J=[\alpha,\beta]$ に対して f の振動量 *(oscillation)* を $O(f,J)=\sup_{y\in J} f(y) - \inf_{y\in J} f(y)$ と定める。

任意の $x\in[a,b]$ に対し区間列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ を、x を内部に含みその長さが *0* に近づくものとする。このとき、$0_n(f,x)=0(f,I_n)$ とし $o(f,x)=\lim_{n\to\infty} O_n(f,x)$ 或いは単に $o(x)$ と定義する。

注意：(i) $o(x)$ は区間列 $\{I_j\}$ の取り方によらない。
(ii) f が x_0 で連続なる必要十分条件は $o(f,x_0)=0$ である。

レポート問題：上の (i), (ii) を証明せよ。

補題 5.7.1 有界閉区間 $J=[\alpha,\beta]$ 上の総べての点で $o(x)<\epsilon$ を満たすならば、ある数 $\lambda>0$ があって J の部分区間で $J_k\leq\lambda$ ならば $0_k\leq 2\epsilon$ となる。

証明：背理法で示す。もしそうでないとすると、(a_p,b_p) $(p=1,2,\cdots)$ という区間列で $|f(a_p)-f(b_p)|>2\epsilon$ かつ $b_p-a_p\to 0(p\to\infty)$ なるものがある。$\{a_p\}$ は有界閉区間 J での無限列なので集積点 $a_0\in J$ が存在する。この a_0 を中心とする任意の区間 K をとると、少なくとも一つの $[a_p,b_p]$ がある。即ち、$O(f,K)\geq 2\epsilon$ なので K を幾ら小さくとっても $o(a_0)\geq 2\epsilon$ となり、仮定に矛盾する。 □

注意：この補題は有界閉区間上の連続関数の一様連続性を拡張した概念と考えられる。

定義 5.7.2 (再掲) φ を $[a,b]$ 上の非減少実数値関数とする。一つの分割 $\Delta\in\mathfrak{D}$ に対し

$$U(f,\varphi,\Delta) = \sum_{k=1}^{m} \sup\{f(x)\mid x\in[x_{j-1},x_j]\}\cdot(\varphi(x_j)-\varphi(x_{j-1})),$$
$$L(f,\varphi,\Delta) = \sum_{k=1}^{m} \inf\{f(x)\mid x\in[x_{j-1},x_j]\}\cdot(\varphi(x_j)-\varphi(x_{j-1})),$$

と定義し、それぞれ上ダルブー・スチェルチェス和（*UDSS=upper Darboux-Stieltjes sums*）、下ダルブー・スチェルチェス和（*LDSS=lower Darboux-Stieltjes sums*）という。任意の $\epsilon>0$ に対し、（f, φ, ϵ によって定まる）ある分割 $\Delta\in\mathfrak{D}$ があって

$$U(f,\varphi,\Delta) - L(f,\varphi,\Delta) < \epsilon \tag{10}$$

のとき、f は φ に関し $[a,b]$ 上で *RS* 積分可能（*=Riemann-Stieltjes integrable*）であるという。

定理 5.7.1 (Riemann) $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の有界関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上 *Riemann* 可積分である必要十分条件は、任意の $\epsilon>0$ に対してある分割 Δ があって

$$\sum O(f,I_i)|I_i|<\epsilon \tag{11}$$

となることである。

証明：$\varphi(x)=x$ のとき、(10) と(11) が同等だということはほぼ明らかであろう。 □

定理 5.7.2 (Du Bois Reymond) $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の有界関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が I 上 *Riemann* 可積分である必要十分条件は、任意の $\epsilon>0$ に対して集合 $E(\epsilon)=\{x\in I\mid o(x)\geq\epsilon\}$ は *Jordan* 測度 *0* である。

証明：$\Longrightarrow$) Riemann 可積分であるとする。任意の $\eta>0$ に対してある分割 $\Delta=\cup_{i=1}^n I_i$ があって $\sum O(f,I_i)|I_i|<\epsilon\eta/2$ となる。番号の集合を $N'=\{i\mid O_i\geq\epsilon\}$ と $N''=\{i\mid O_i<\epsilon\}$ とに分け、

$$\frac{\epsilon\eta}{2}>\sum O(f,I_i)|I_i|=\sum_{i\in N'}O(f,I_i)|I_i|+\sum_{i\in N''}O(f,I_i)|I_i|\geq\epsilon\sum_{i\in N'}|I_i|$$

となることより、

$$\sum_{i\in N'}|I_i|<\frac{\eta}{2}$$

となる。ところで、$E(\epsilon)$ の中の点は、それがもし $O_i<\epsilon$ を満足するよう部分区間の中にあるとしても、それは端点である[30]。これより、分割 Δ の各分点 $\{x_j\}_{j=0}^n$ に対しそれを長さが $\eta/2(n+1)$ である区間 $\{I_j'\}_{j=1}^{n+1}$ で覆うと、

$$E(\epsilon)\subset\cup_{i\in N'}I_i\cup(\cup_{j=1}^{n+1}I_j')$$

であり、その長さは η より小さい。

$\Longleftarrow$) 任意の $\eta>0$ に対して区間 $\{I_k\}_{k=1}^p$ があって

$$E(\epsilon)\subset\cup_{k=1}^p I_k=J,\quad\sum_{k=1}^p|I_k|<\eta \tag{12}$$

とする。必要ならばこの区間 I_k を少し左右に膨らまして、J の端になるような点は $E(\epsilon)$ に属さないと仮定できる。すると $I\setminus J$ は有限個の区間 $\{[\alpha_i,\beta_i]\}$ からなるが、それらの各区間 $[\alpha_i,\beta_i]$ では $o(x)<\epsilon$ だから、補題 5.7.1 を適用できる。即ち、区間 $[\alpha_i,\beta_i]$ のある分割 Δ_i があって、その部分区間では振動量は 2ϵ を越えない。これらの分割を合わせたものを Δ とすると、そこで

$$\sum O(f,I_i)|I_i|=\sum_{i\in J'}O(f,I_i)|I_i|+\sum_{i\in N''}O(f,I_i)|I_i|$$

と書ける。右辺の第 2 項は $2\epsilon(b-a)$ を越えない。また、$M=\sup|f(x)|$ とすると第 1 項は $2M\sum_{J'}|I_i|(<2M\eta)$ である。故に

$$\sum O(f,I_i)|I_i|<2M\eta+2\epsilon(b-a)$$

となる。ϵ と η は任意だったから f は $[a,b]$ 上で Riemann 可積分である。 □

命題 5.7.1 f を $[a,b]$ 上で *Riemann* 可積分ならば、f の連続点は $[a,b]$ で稠密である。

[30]実際、$[x_{i-1},x_i]$ で $O_i<\epsilon$ とすれば、その区間の内部の点では $o(x)<\epsilon$ となっているからである

証明：まず、『任意の $\eta > 0$ に対して $E(\epsilon) = \{x \in I \mid o(x) \geq \epsilon\}$ は閉集合である』に注意する[31]。これを認め、f は $[a,b]$ 上で Riemann 可積分にもかかわらず、ある区間 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ があってそこではすべての点で f は不連続、任意の $x \in [\alpha,\beta]$ で $o(x) > 0$、と仮定する。即ち、

$$[\alpha,\beta] = \cup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n = \{x \in [\alpha,\beta] \mid o(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

である。すると Baire の category 論法より、ある n_0 があって $[x_1,x_2] \subset E_{n_0}$ としてよい。即ち

$$o(x) \geq \frac{1}{n_0}, \quad x \in [x_1,x_2]$$

となる。f は $[x_1,x_2]$ でも Riemann 可積分だが、$E(1/n_0) > 0$ となり (12) に矛盾する。 □

定理 5.7.3 (Lebesgue) $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I = [a,b]$ 上の有界関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し、

f は I 上 *Riemann* 可積分である $\Longleftrightarrow$ f の不連続点の集合 $D = \{x \in I \mid o(f,x) \neq 0\}$ は零集合である

証明：$\Longrightarrow$)f が I 上 Riemann 可積分とする。$E(\epsilon)$ の定義で ϵ として n^{-1}

$$E(1) \subset E(2^{-1}) \subset E(3^{-1}) \subset \cdots$$

ととると、定理 5.7.2 より $E(n^{-1})$ は Jordan 測度 0、従って零集合である。また、

$$D = \{x \in I \mid o(f,x) \neq 0\} = \cup_{n>0} E(n^{-1})$$

となるから、D も零集合である。

$\Longleftarrow$)D も零集合とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して $E(\epsilon) \subset D$ となるから $E(\epsilon)$ は零集合である。一方、$E(\epsilon)$ は閉集合だから、$E(\epsilon)$ は Jordan 測度 0 である。故に、定理 5.7.2 より f は I 上 Riemann 可積分である。 □

5.7.2 広義積分的な操作をしても HK-積分可能なクラスは拡がらない

定理 5.7.4 f を有界閉区間 $[a,b]$ 上の関数で、任意の $c \in (a,b)$ に対して $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,c];\varphi)$ なるものとする。もし極限 $\lim_{c \to b-0} \int_a^c f d\varphi = I$ が存在するならば、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,b];\varphi)$ であり、

$$\int_a^b f d\varphi = I + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

特に、φ が b で左連続ならば $\int_a^b f d\varphi = I$ となる。

証明：任意に $\epsilon > 0$ をとり $c \in (a,b)$ を $c < t < b$ かつ

$$|f(b)| \cdot [\varphi(b-0) - \varphi(t)] < \epsilon \quad \text{and} \quad \left| \int_a^t f d\varphi - I \right| < \epsilon$$

を満たすように選ぶ。狭義単調増加数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $[a,b)$ の中に $x_0 = a,\ \lim x_n = b$ となるように選ぶ。Henstock の補題より、$[x_{n-1},x_n]$ 上の正関数 δ_n を、$[x_{n-1},x_n]$ の任意の δ_n-細仕切り $\{(A_1,\xi_1),\cdots,(A_p,\xi_p)\}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{p} \left| f(\xi_i)\varphi(A_i) - \int_{A_i} f d\varphi \right| < \epsilon 2^{-n}$$

[31] これをどう示したら良いか？

となるようにとれる。そこにおいて、一般性を失うこと無しに $\delta_1(x_0) \le x_1 - x_0$、更に、任意の $y \in (x_{n-1}, x_n) n = 1, 2, \cdots$ に対し、

$$\delta_{n+1}(x_n) = \delta_n(x_n) \le \min\{x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n\}, \quad \delta_n(y) \le \min\{y - x_{n-1}, x_n - y\}$$

と仮定することができる。$[a, b]$ 上の正関数 δ を

$$\delta(y) = \begin{cases} \delta_n(y), & c \in [x_{n-}, x_n], n = 1, 2, \cdots, \\ b - c, & y = b \end{cases}$$

と定め、$[a, b]$ 上の δ-細仕切り $\mathcal{P} = \{(A_1, \xi_1), \cdots, (A_p, \xi_p)\}$ を選ぶ。適当に番号を付け替えると、$A_i = [t_{i-1}, t_i]$、$a = t_0 < \cdots < t_p = b$ とできる。$t_{i-1} < \xi_i < t_i$ のとき $([t_{i-1}, t_i], \xi_i)$ を $\{([t_{i-1}, \xi_i], \xi_i), ([\xi_i, t_i], \xi_i)\}$ で置き換えると、$[a, b]$ 上の δ-細仕切り $\mathcal{Q}$ で $\sigma(f, \mathcal{Q}) = \sigma(f, \mathcal{P})$ となるものが得られる。そこで一般性を失わずに

$$\{\xi_1, \cdots, \xi_p\} \subset \{t_0, t_1, \cdots, t_p\}.$$

と仮定できる。もし $\mathcal{P}_n = \{(A_i, \xi_i) \mid A_i \subset [x_{n-1}, x_n]\}$ で、k が $x_k \ge t_{p-1}$ なる最初の正整数とすると、正関数 δ の定義から

(i) $n = 1, \cdots, k-1$ に対して $\mathcal{P}_n$ は $[x_{n-1}, x_n]$ の δ_n-細仕切りである。

(ii)$\mathcal{P}_k$ は $[x_{k-1}, t_{p-1}]$ の δ_k-細仕切りである。特に、$\mathcal{P}_k$ は $[x_{k-1}, x_k]$ の δ_k-細仕切りである。

(iii) $\mathcal{P} = (\cup_{n=1}^{k} \mathcal{P}_n) \cup \{([t_{p-1}, b], b)\}$

が分る。これより、

$$\int_a^{t_{p-1}} f d\varphi = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f d\varphi + \int_{x_{k-1}}^{t_{p-1}} f d\varphi$$

であるから、

$$\begin{aligned}\big|\sigma(f, \mathcal{P}) - I - f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)]\big| &\le \big|f(b)[\varphi(b) - \varphi(t_{p-1})] - f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)]\big| \\ &\quad + \sum_{n=1}^{k-1} \left|\sigma(f, \mathcal{P}_n) - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f d\varphi\right| + \left|\sigma(f, \mathcal{P}_k) - \int_{x_{k-1}}^{t_{p-1}} f d\varphi\right| + \left|\int_a^{t_{p-1}} f d\varphi - I\right| \\ &< |f(b)| \cdot [\varphi(b-) - \varphi(t_{p-1})] + \sum_{n=1}^{k} \epsilon 2^{-n} + \epsilon < 3\epsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

注意：上の定理は「HK-積分には広義積分は存在しない」別の表現をすれば「**広義積分的な操作をしても HK-積分可能なクラスは拡がらない**」ことを示している。

定理 5.7.5 (no improper HK-integral exists) 区間 $[a, b] \subset [-\infty, \infty]$ 上で定義された実数値関数 f を与えられたとする。*HK*-積分 $\int_a^b f$ が存在しその値が $A \in \mathbb{R}$ に等しいための必要十分条件は f が各部分区間 $[a, x] \subset [a, b]$ で *HK*-積分可能で $\lim_{x \to b-0} \int_a^x f$ が存在しその値が A となることである。

レポート問題：上の定理の証明を与えよ。

5.7.3 注意 $\int_0^1 x^{-s} \cos x^{-1}$ について

主張 5.7.1

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \pi x^{-2} & 0 < x \le 1, \\ 0 & x = 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x \cos \pi x^{-2} + 2\pi x^{-1} \sin \pi x^{-2} & 0 < x \le 1, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

とおくと、$f \notin \mathcal{R}_{\mathrm{M}}([0,1])$ となる。

$\because$) 主張を背理法で示そう。上の命題より $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}([0,1])$ だから、$|f| \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}([0,1])$、特に

$$\mathcal{R}_{\mathrm{M}}([0,1]) \ni g(x) = \begin{cases} x^{-1}|\sin \pi x^{-2}| & 0 \notin x, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

変数変換 $t = x^{-2}$ により

$$\begin{aligned}\int_0^1 g dx &\geq \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{|\sin \pi x^{-2}|}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^n \frac{|\sin \pi t|}{t} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{|\sin \pi t|}{t} \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}\int_{k-1}^k |\sin \pi t| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \to \infty \ (n \to \infty). \quad \text{矛盾!}\end{aligned}$$

注意：この場合、関数 f は M 積分可能ではないにもかかわらず、積分値があれば それは $F(1) - F(0)$ になるはずと考えられる。正にこの点が極めて重要な認識であり、でも「ほっておこう」か「何か別の考え方がないのだろうか」の分岐点を与える！

主張 5.7.2 $f(x) = \begin{cases} x^{-s}\cos x^{-1} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ とする。$s < 2$ ならば $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([0,1])$ であるが、$s < 1$ のときのみ $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}([0,1])$ である。即ち、一般に $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}([0,1]) \subset \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([0,1])$ だが、真に含まれている.

$0 < a < 1$ とすると $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([a,1])$ なることは明らか。変数変換して

$$\int_a^1 dx = \int_1^{1/a} t^{s-2}\cos t dt$$

となるから、

$$\left|\int_a^b x^{-s}\cos x dx\right| \leq a^{-s}\left|\int_a^\xi \cos x dx\right| + b^{-s}\left|\int_\xi^b \cos x dx\right| \leq 2(a^{-s} + b^{-s})$$

である。これより

$$\lim_{a,b\to\infty}\int_a^b x^{-s}\cos x dx = 0, \quad \text{i.e.} \quad -\infty < \exists \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-s}\cos x dx < \infty.$$

故に、5.7.4 より $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}([0,1])$ なる必要十分条件は $s < 2$.

5.8 関数の積の積分可能性

問い：$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ のとき、如何なる $m \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ に対し $m \cdot f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となるのか？

定理 5.8.1 $I = [a,b]$ とし、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ とする。$f \in \mathrm{M}(I)$ となるための必要十分条件は任意の I 上有界な $m \in \mathcal{M}(I)$[32]に対し $f \cdot m \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。

証明 [Thm.10.11, p.161 of Bartle [1]]：$\Longrightarrow$)$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ ならば $|f|, f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり、$m \in \mathcal{M}(I)$ が有界ならば $-M|f| \leq m \cdot f \leq M|f|$ なる $M > 0$ がある。故に、$\pm M|f| \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となるから $f \cdot m \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ で

[32] $\mathcal{M}(I)$ で I 上の可測関数を表す

ある。

$\Longleftarrow$)$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ より $E^+ = \{f \geq 0\}$, $E^- = \{f < 0\}$ とおくと、$E^\pm$ は共に I の可測集合である。$m(x) = \begin{cases} 1 & \{x \in E^+\}, \\ -1 & \{x \in E^-\} \end{cases}$ と定義すると $m \in \mathcal{M}(I)$ は有界で、仮定より $|f| = m \cdot f\mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ となるから、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(I)$ □

定理 5.8.2 $I = [a,b]$ とし、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり $\varphi \in BV(I)$ ならば、$f \cdot \varphi \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり

$$\int_a^b f \cdot \varphi = \int_a^b \varphi dF = F(b)\varphi(b) - \int_a^b F d\varphi$$

が成立する。ここで $F(x) = \int_a^x f$ とおいた。

証明 [Thm.10.12, p.161 of Bartle [1]]：F は I 上で連続だから RS 積分の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対してある数 $\zeta_\epsilon > 0$ があって、仕切り $\dot{\mathcal{P}} = \{[(x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^n$ の幅が ζ_ϵ 以下ならば

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b \varphi dF \right| \leq \epsilon$$

が成立する。仮定より $M > 0$ があって $|\varphi(x)| \leq M (x \in I)$ が成立する。$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ とすると、I 上のゲージ δ_ϵ があって $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\epsilon$ ならば

$$\left| \sum_{i=1}^n \left[f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right] \right| \leq \epsilon / M$$

となる。Saks-Henstock の補題から

$$\sum_{i=1}^n \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| \leq \epsilon / (2M).$$

$\delta_\epsilon(x) \leq \zeta_\epsilon$ と仮定できるから

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \varphi dF \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right| \\
&\qquad + \left| \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b \varphi dF \right| \\
&\leq M \sum_{i=1}^n \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| + \epsilon \\
&\leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} + \epsilon = 2\epsilon
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから $f \cdot \varphi \in \mathcal{R}_{\mathrm{HK}}(I)$ であり、これで 1 番目の等式が示せた。2 番目の等式は部分積分である。
□

定理 5.8.3 f が $I = [a,b]$ 上で cme-原始関数 F を持ち、$\varphi \in BV(I)$ とすると、$f \cdot \varphi$ もまた cme-微分可能であり

$$P(x) = \int_a^x \varphi dF = \varphi(x)F(x) - \int_a^x F d\varphi.$$

証明 [Thm.10.13, p.163 of Bartle [1]]：φ は I 上で単調増加として計算して一般性を失わない。I の可算集合 C_φ 以外では φ は微分可能であり、仮定からやはり可算集合 C_f 以外では $F'(x) = f(x)$ となる。$x \in (a,b) \setminus (C_\varphi \cup C_f)$ のとき、P は x で微分可能で $P'(x) = f(x)\cdot\varphi(x)$ なることを示そう。

$$P(x+h) - P(x) = \int_x^{x+h} \varphi dF = \varphi F\Big|_x^{x+h} - \int_x^{x+h} F d\varphi$$

であり、RS 積分に関する中間値の定理より $x \leq \exists\xi \leq x+h$ があって

$$\begin{aligned} P(x+h) - P(x) &= [\varphi(x+h)F(x+h) - \varphi(x)F(x)] - F(\xi)[\varphi(x+h) - \varphi(x)] \\ &= \varphi(x+h)[F(x+h) - F(x)] - [\varphi(x+h) - \varphi(x)][F(\xi) - F(x)] \end{aligned}$$

となる。これより P は x で連続である。$h > 0$ として（形式的に）

$$\frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \varphi(x+h)\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - [\varphi(x+h) - \varphi(x)]\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}\frac{\xi - x}{h}$$

となるが $|\xi - x/h| \leq 1$ であり

$$\lim_{h\to 0}[\varphi(x+h) - \varphi(x)] = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{h\to 0}\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} = F'(x)$$

となる事が分かるから、形式的な計算は正当化できて $P'(x) = F'(x)\cdot\varphi(x) = f(x)\cdot\varphi(x)$ となる。両端点 a, b での片側微分についても同様に議論できる。 □

定理 5.8.4 $I = [a,\infty]$ とし $f : I \to \mathbb{R}$ とし、任意の $c \geq a$ に対して $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([a,c])$ とする。このとき、$f \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$ なる必要十分条件は任意の $\epsilon > 0$ に対して $K(\epsilon) \geq a$ があって $q > p \geq K(\epsilon)$ ならば $|\int_p^q f| \leq \epsilon$ となることである。

証明 [Cauchy Criterion 16.6, p.267 of Bartle [1]]：既述。

定理 5.8.5 $I = [a,\infty]$ とし $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$ とする。

(i) $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$ かつ、

(ii) φ が I 上で有界、単調、

ならば $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。

証明 [Abel's test 16.9, p.269 of Bartle [1]]：仮定より $M > 0$ があって上で $|\varphi(x)| \leq M$ となる。$f \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$ と仮定しているのだから、Cauchy の判定条件 5.8.4 より、任意の $\epsilon > 0$ に対して $K(\epsilon) \geq a$ があって $q > p \geq K(\epsilon)$ ならば $|\int_p^q f| \leq \epsilon/M$ となる。φ は単調だったから前に述べた定理 5.8.2 より $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([p,q])$ であり、第 2 平均値定理**??**より $\xi \in [p,q]$ があって

$$\int_p^q f\varphi = \varphi(p)\int_p^\xi f + \varphi(q)\int_\xi^q f$$

となる。故に、もし $q > p \geq K(\epsilon)$ ならば $|\int_p^q f\varphi| \leq M\cdot\epsilon/M + M\cdot\epsilon/M = 2\epsilon$ となる。再度 Cauchy の判定条件 5.8.4 より $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$. □

定理 5.8.6 $I = [a,\infty]$ とし $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$ とする。

(i) 任意の $c \geq a$ に対し $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([a,c])$ かつ、$[a,\infty)$ 上で $F(x) = \int_a^x f$ が有界であり、

(ii) φ が I 上で単調かつ、$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$、

ならば $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。

証明 [Chartier-Dirichlet's test 16.10, p.269 of Bartle [1]]：定理 bart.thm.10.12 より、任意の $c \geq a$ に対し $f\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([a,c])$。また、$M > 0$ を $[a,\infty)$ 上で $|F(x)| \leq M$ なるものとする。$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$ だから任意の $\epsilon > 0$ に対して $K(\epsilon) \geq a$ があって $x \geq K(\epsilon)$ に対して $|\varphi(x)| \leq \epsilon/4M$ である。もし $q > p \geq K(\epsilon)$ ならば

$$\begin{aligned}\int_p^q f\varphi &= \varphi(p)\int_p^\xi f + \varphi(q)\int_\xi^q f \\ &= \varphi(p)[F(\xi) - F(p)] + \varphi(q)[F(q) - F(\xi)].\end{aligned}$$

故に、もし $q > p \geq K(\epsilon)$ ならば

$$\left|\int_p^q f\varphi\right| \leq \frac{\epsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\epsilon}{4M}\cdot 2M = \epsilon.$$

Cauchy の判定条件 5.8.4 より $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$. □

定理 5.8.7 $I = [a,\infty]$ とし $f,\varphi : I \to \mathbb{R}$ とする。

(i) 任意の $c \geq a$ に対し $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([a,c])$ かつ、$[a,\infty)$ 上で $F(x) = \int_a^x f$ が有界であり、

(ii)′ $[a,\infty)$ 上で φ は微分可能で $\varphi' \in L(I)$、

(iii) $F(x)\varphi(x)$ は $x \to \infty$ で極限を持つ、

ならば $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$ である。

証明 [Du Bois-Reymond's test 16.11, p.270 of Bartle [1]]：ある $M > 0$ があって $[a,\infty)$ 上で $|F(x)| \leq M$。故に $|F(x)\varphi'(x)| \leq M|\varphi'(x)|$ であり、仮定より $F(x)\varphi'(x) \in L(I)$ となる。だから $\lim_{x\to\infty}\int_a^x F\varphi'$ が存在する。任意の $c \in I$ に対し $F\varphi' \in L([a,c])$ であり、部分積分公式から $f\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([a,c])$ であり $\int_a^c f\varphi = F(c)\varphi(c) - \int_a^c F\varphi'$ である。Hake の定理**??**より $f\cdot\varphi \in \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}(I)$. □

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}dx$ $f(x) = \sin x$、$\varphi(x) = 1/\log x$ とおくと、$f \notin \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([2,\infty])$ だから Abel の判定条件は適用できないが Chartier-Dirichlet の判定条件と Du Bois-Reymond の判定条件は適用でき積分可能。

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x + 2\sin x}dx$ $f(x) = \sin x$、$\varphi(x) = 1/(x + 2\sin x)$ とおくと、$f \notin \mathcal{H}_{\mathrm{HK}}([1,\infty])$ だから Abel の判定条件は適用できないし、φ は単調ではないので Chartier-Dirichlet の判定条件も適用できないが、Du Bois-Reymond の判定条件は適用でき積分可能。

$\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 \frac{x}{x+1}dx$ $f(x) = \sin x^2$、$\varphi(x) = x/(x+1)$ とおくと、φ は 0 に収束しないので Chartier-Dirichlet の判定条件は適用できないが、Abel 及び Du Bois-Reymond の判定条件は適用でき積分可能。

$\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\sin x^2 dx$ $f(x) = \sin x^2$、$\varphi(x) = \sqrt{x}$ とおくと、上の 3 条件はどれも適用できない。しかし、変数変換 $y = x^2$ を用いて $\displaystyle\int_1^\infty y^{-1/4}\sin y\, dy$ と変換するとこれには Chartier-Dirichlet の判定条件が適用できる。

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ $f(x) = \sin x$、$\varphi(x) = 1/x$ とおくと、Chartier-Dirichlet 及び Du Bois-Reymond の判定条件は適用でき積分可能。

参考文献

[1] R.G. Bartle: A Modern Theory of Integration, Graduate Studies in Mathematics, vol.32, Amer.Math.Soc. Providence,2001.

[2] B. Bongiorno: The Henstock-Kurzweil Integral, pp. 587-615, in Handbook of Measure Theory, ed. E. Pap, Elsevier Science B.V, 2002.

[3] Evans-Gariepy:Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[4] P-Y. Lee: Lanzhou Lectures on Henstock Integration, Series in Real Analysis, vol.2,World Scientific, Singapore etc, 1989.

[5] R.M. McLeod:The Generalized Riemann Integral, The Carus Math.Monographs 20(1980), MAA.

[6] E.J. McShane: *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals*, Mem.Amer.Math.Soc. 88(1969), pp. 1-53.

[7] W. K. Pfeffer: The Riemann Approach to Integration, Cambridge University Press, New York, 1993.