● 問題は５題（但し、$\boxed{\textbf{4a}}$か$\boxed{\textbf{4b}}$のどちらかを選択せよ)、答案用紙は５枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非述べて下さい（できれば e-mail で)。

＝＝＝＝＝＝

$\boxed{\textbf{1}}$ $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin x \sin x^2 dx$ が収束することを示せ。

$\boxed{\textbf{2}}$ $f(n)=(n^2+1)(n^2+4)(n^2+9)\cdots(n^2+(2n)^2)$ とするとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)^{1/n}}{n^4}$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$ 区分的に C^1-級の境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ と、$\overline{\Omega}$ 上の C^2-級関数 f,g に対し Green の公式が成立する：

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-\frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.$$

但し、 n は単位外向き法線ベクトル、右辺は $\partial\Omega$ 上の線積分。

(i) $\epsilon>0$ とする。この公式を特に Ω が $D_{\epsilon,R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\epsilon\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le R\}$ の場合に極座標を用いて表現し直し、証明せよ（ヒント：$\tilde{f}(r,\theta)=f(r\cos\,\theta, r\sin\,\theta)$ を r と θ に関して２回偏微分してみよ！)。

(ii) $D_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<R\}$ とし、f を $\overline{D}_R$ 上の C^2 級関数で $\Delta f=0$ なるものとする。この時、(i) で $g=1$ とすることによって以下を示せ。

$$f(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\cos\,\theta, b+R\sin\theta)d\theta.$$

$\boxed{\textbf{4a}}$ 積分値 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ を以下のようにして求めよ。

$\alpha\ge 0$ に対し関数 $F(\alpha)$ を $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$ と定める。このとき、

(i) $\dfrac{dF}{d\alpha}$ を α と $\log(1+\alpha)$ を用いて表せ。

(ii) $F(1)$ を求めよ。$\left(\text{Hint: } F(0)=0 \text{ より } F(1)=F(1)-F(0)=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)d\alpha \text{ である。}\right)$

$\boxed{\textbf{4b}}$ 積分値 $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t}dt$ を以下のようにして求めよ。

(i) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\log(1+t)}{t}dt$ を x に関して整級数展開せよ（ヒント：Taylor 展開と項別積分定理を用いよ)。

(ii) Abel の定理を用いよ（ここで $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}=\pi^2/6$、$\sum_{n=0}^\infty(2n+1)^{-2}=\pi^2/8$ は既知としてよい)。

$\boxed{\textbf{5}}$ $B=\{x\in\mathbb{R}^3\mid |x|<1\}$、$y\in\mathbb{R}^3$ とするとき、

$$\int_B \cos(x,y)dx=\frac{4\pi}{|y|^2}\left(\frac{\sin|y|}{|y|}-\cos\,|y|\right)$$

なることを示せ。ここで、$(x,y)=\sum_{j=1}^3 x_jy_j$、$|y|^2=(y,y)$ とする。

＝＝＝＝

パラメタ付き積分に関する定理の幾つかとと基本的な関数の原始関数を参考の為にこの裏に載せておく。

定理 0.0.1 (項別積分定理) Ω を $\mathbb{R}^m$ 内の有界な面積確定集合とする。Ω 上の *Riemann* 可積分関数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ が $t\to b$ のとき Ω 上の R 可積分関数 f に Ω 上 一様収束すれば

$$\lim_{t\to b}\int_\Omega f_t(x)dx=\int_\Omega f(x)dx$$

が成立する。

定理 0.0.2 Ω を $\mathbb{R}^n$ の体積確定な有界閉集合、I を任意の 1 次元区間、$K=\Omega\times I$ とおく。$f(x,t)$ $(x\in\Omega,\ t\in I)$ が K 上連続ならば
(1) $F(t)=\displaystyle\int_\Omega f(x,t)dx$ は I 上連続であり、
(2) 更に $\partial f/\partial t$ が K 上で連続ならば、F は I 上 C^1 級で

$$F'(t)=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

が成立する。

定理 0.0.3 (Abel の定理) 幂級数 $\sum_n a_nx^n$ の収束半径を r $(0<r<\infty)$ とする。もし、$x=r$ においてこの級数が収束するならば、収束は $[0,r]$ においても一様である。従って、和 $f(x)=\sum_n a_nx^n$ は $(-r,r]$ において連続である。故に

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=f(r)=\sum_n a_nr^n$$

となる。また、$x=-r$ において収束する場合も同様である。

%%%%%% 基本的な関数の原始関数 %%%%%%

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1),\qquad\int\frac{dx}{x}=\log|x|,$$

$$\int e^xdx=e^x,\qquad\int a^xdx=\frac{a^x}{\log a}\quad(a>0,\,a\neq1),\qquad\int\log|x|dx=x\log|x|-x,$$

$$\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)\quad(a\neq0),\qquad\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)\quad(a\neq0),$$

$$\int\sec^2(ax+b)dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)\quad(a\neq0),\qquad\int\tan(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)|\quad(a\neq0),$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\quad(a\neq0),\qquad\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}\quad(a\neq0),\qquad\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\quad(a\neq0),$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\quad(a>0),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}dx=\log|x+\sqrt{x^2+A}|\quad(A\neq0),$$

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)\quad(A\neq0).$$