

難しかったようで、その結果、期末受験者総数 35 名中 4.2 割程度しかパスしなかった。パスした人々の番号を載せておく。

0400060, 0401035, 0401785, 0403608, 0406297, 0406742, 0408853, 0409048,
0413529, 0421859, 0421871, 0428028, 0305633, 0309720, 9909166

採点は、中間 20 点、演習 30 点、期末 50 点の総点+感想少々勘案し、追試との関連で 1.2 倍し 100 点以上及び小数点以下を切り捨てたものを成績とした。合格しなかった者の点数は生点のままとした。

追試予定日：4 月 10 日 (月)、時間：5-8 時限、場所：数学第 5 演習室 アクマデ、ヨテー！

追試は 100 満点であり、追試合格者のみはその得点を修正点として報告する予定である。

以下には追試の予想問題についても述べてある。

=====

1 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin x \sin x^2 dx$ が収束することを示せ。

解答例 [8] : $d \cos x^2 / dx = -2x \sin x^2$ より部分積分して

$$\begin{aligned} \int_0^R \sin x \sin x^2 dx &= - \int_0^R \frac{\sin x}{2x} d(\cos x^2) \\ &= \frac{\cos x^2 \sin x}{2x} \Big|_R^0 + \int_0^R \cos x^2 \left(\frac{\cos x}{2x} - \frac{\sin x}{2x^2} \right) dx = I + II - III \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} I &= \frac{\cos x^2 \sin x}{2x} \Big|_R^0 \rightarrow 1/2 \quad (R \rightarrow \infty), \\ |III| &\leq \int_0^R \frac{|\cos x^2 \sin x|}{2x^2} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{2x^2} dx < \infty \end{aligned}$$

だから、第 II 項を調べる。再度部分積分して

$$II = \int_0^R \cos x^2 \frac{\cos x}{2x} dx = \int_0^R \frac{\cos x}{4x^2} d(\sin x^2) = \frac{\sin x^2 \cos x}{4x^2} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{\sin x^2 \sin x}{4x^2} dx + \int_0^R \frac{\sin x^2 \cos x}{8x^3} dx$$

となる。これより II は $R \rightarrow \infty$ のとき収束していることが分かる。 □

[別解 1] 藤田堯作:余弦公式から

$$\sin x \cdot \sin x^2 = \frac{1}{2}(\cos(x^2 - x) - \cos(x^2 + x))$$

となることと、 $x^2 + x = (x + 1)^2 - (x + 1)$ に注意する。

$$\begin{aligned} \int_0^R (\cos(x^2 - x) - \cos(x^2 + x)) dx &= \int_0^R \cos(x^2 - x) dx - \int_1^{R+1} \cos(x^2 - x) dx \\ &= \int_0^1 \cos(x^2 - x) dx - \int_R^{R+1} \cos(x^2 - x) dx \end{aligned}$$

となるから

$$\int_0^R \sin x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(x^2 - x) dx - \frac{1}{2} \int_R^{R+1} \cos(x^2 - x) dx$$

である。一方 $d \sin(x^2 - x)/dx = (2x - 1) \cos(x^2 - x)$ だから $x > R > 1/2$ とすると、

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{R+1} \cos(x^2 - x) dx \right| &= \left| \frac{\sin(x^2 - x)}{2x - 1} \Big|_R^{R+1} + \int_R^{R+1} \frac{2 \sin(x^2 - x)}{(2x - 1)^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2R + 1} + \frac{1}{2R - 1} + \int_R^{R+1} \frac{1}{(2x - 1)^2} dx \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

[別解 2] 糟谷久矢作: $R > R' > 0$ とすると

$$\int_{R'}^R \sin x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin x \cos x^2}{x} \right]_{R'}^R - \frac{1}{2} \int_{R'}^R \frac{\cos x^2 \cdot \sin x}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int_{R'}^R \frac{\cos x^2 \cdot \cos x}{x} dx$$

となる。上式右辺の各項を評価する。

$$\left| \frac{\sin R \cos R^2}{R} - \frac{\sin R' \cos R'^2}{R'} \right| \leq \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \leq \frac{2}{R'}$$

と

$$\left| \int_{R'}^R \frac{\cos x^2 \cdot \sin x}{x^2} dx \right| \leq \int_{R'}^R \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$$

は $R' \rightarrow \infty$ とすると 0 にいく。また、

$$\int_{R'}^R \frac{\cos x^2 \cdot \cos x}{x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin x^2 \cdots \cos x}{x^2} \right]_{R'}^R + \frac{1}{2} \int_{R'}^R \frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3} \sin x^2 dx$$

だから、前と同じ計算で、これも $R' \rightarrow \infty$ とすると 0 にいく。

[別解 3] 榎本卓作: $1/2 < R' < R$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{R'}^R (\cos(x^2 - x) - \cos(x^2 + x)) dx &= \left[\frac{\sin(x^2 - x)}{2x - 1} \right]_{R'}^R - \left[\frac{\sin(x^2 + x)}{2x + 1} \right]_{R'}^R \\ &= \frac{\sin(R^2 - R)}{2R - 1} - \frac{\sin(R'^2 - R')}{2R' - 1} - \frac{\sin(R^2 + x)}{2R + 1} + \frac{\sin(R'^2 + R')}{2R' + 1} \end{aligned}$$

となる。ここで $R' \rightarrow \infty$ とすれば、上式左辺の絶対値は 0 に収束する。 \square

2 $f(n) = (n^2 + 1)(n^2 + 4)(n^2 + 9) \cdots (n^2 + (2n)^2)$ とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)^{1/n}}{n^4}$ を求めよ。

解答例 [7]: $g(n) = (1 + (1/n)^2)(1 + (2/n)^2)(1 + (3/n)^2) \cdots (1 + (2n/n)^2) = f(n)/n^{4n}$ とおく。これより $f(n)^{1/n}/n^4 = g(n)^{1/n}$ だから、これの対数をとって

$$\frac{1}{n} \log g(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log(1 + (k/n)^2) \rightarrow \int_0^2 \log(1 + x^2) dx$$

となることが分かる。 $(x \log(1 + x^2))' = \log(1 + x^2) + 2x^2/(1 + x^2)$ であり $(2 \arctan x)' = 2/(1 + x^2)$ だから

$$(x \log(1 + x^2) + 2 \arctan x - 2x)' = \log(1 + x^2)$$

となる。これより、

$$\int_0^2 \log(1 + x^2) dx = x \log(1 + x^2) + 2 \arctan x - 2x \Big|_{x=0}^2 = 2 \log 5 + 2 \arctan 2 - 4.$$

exp をとり、指数関数の連続性より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)^{1/n}}{n^4} = e^{2 \log 5 + 2 \arctan 2 - 4}. \quad \square$$

3 区分的に C^1 -級の境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と、 $\overline{\Omega}$ 上の C^2 -級関数 f, g に対し Green の公式が成立する：

$$\iint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} g \right) ds.$$

但し、 n は単位外向き法線ベクトル、右辺は $\partial\Omega$ 上の線積分。

(i) $\epsilon > 0$ とする。この公式を特に Ω が $D_{\epsilon, R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq R\}$ の場合に極座標を用いて表現し直し、証明せよ。

(ii) $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < R\}$ とし、 f を $\overline{D_R}$ 上の C^2 級関数で $\Delta f = 0$ なるものとする。この時、(i) で $g = 1$ とすることによって以下を示せ。

$$f(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + R \cos \theta, b + R \sin \theta) d\theta.$$

[略解例]：(i)[10] (a, b) を中心とする極座標をとる。 $x-a = r \cos \theta, y-b = r \sin \theta$ ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおき、 $u(x, y)$ に対し $\tilde{u}(r, \theta) = u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ と記す。この時、

$$(\widetilde{\Delta u})(r, \theta) = [\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2] \tilde{u}(r, \theta)$$

となることは、1 年次微分積分学の基本的修得事項。2 年次になって少々詳しく習った積分記号下の変数変換公式により

$$\iint_{D_{\epsilon, R}} f(x, y) \Delta g(x, y) dx dy = \iint_{(\epsilon, R) \times (0, 2\pi)} \tilde{f}(r, \theta) (\widetilde{\Delta g})(r, \theta) r dr d\theta$$

となる。重積分から累次積分に直して部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^R \tilde{f} \partial_r^2 \tilde{g} r dr &= [r \tilde{f} \partial_r \tilde{g}]_{\epsilon}^R - \int_{\epsilon}^R \partial_r (r \tilde{f}) \partial_r \tilde{g} dr \\ &= R \tilde{f} \partial_r \tilde{g} - \epsilon \tilde{f} \partial_r \tilde{g} - \int_{\epsilon}^R \partial_r \tilde{f} \partial_r \tilde{g} r dr - \int_{\epsilon}^R \tilde{f} \partial_r \tilde{g} dr, \end{aligned}$$

かつ

$$\int_{\epsilon}^R \tilde{f} \frac{1}{r} \partial_r \tilde{g} r dr = [\tilde{f} \tilde{g}]_{\epsilon}^R - \int_{\epsilon}^R \tilde{g} \frac{1}{r} \partial_r \tilde{f} r dr.$$

f と g の役割を変えて計算すると

$$\int_{\epsilon}^R \tilde{f} (\partial_r^2 \tilde{g} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{g}) r dr - \int_{\epsilon}^R \tilde{g} (\partial_r^2 \tilde{f} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{f}) r dr = [r \tilde{f} \partial_r \tilde{g}]_{\epsilon}^R - [r \tilde{g} \partial_r \tilde{f}]_{\epsilon}^R. \quad (1)$$

故に、上式を θ に関して積分し、円環領域 $D_{\epsilon, R}$ の外側の境界で ∂_r は外向きの法線微分、内側の境界で $-\partial_r$ は外向きの法線微分を与えることに注意する。すると、

$$\int_0^{2\pi} R \tilde{f}(R, \theta) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(R, \theta) - \int_0^{2\pi} \epsilon \tilde{f}(\epsilon, \theta) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(\epsilon, \theta) = \int_{\partial D_{\epsilon, R}} f \frac{\partial g}{\partial n} ds. \quad (2)$$

また任意の r で

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f} \partial_\theta^2 \tilde{g} d\theta = - \int_0^{2\pi} \partial_\theta \tilde{f} \partial_\theta \tilde{g} d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{g} \partial_\theta^2 \tilde{f} d\theta$$

なることに注意すると、(1) より

$$\begin{aligned} \iint_{D_{\epsilon, R}} (f\Delta g - g\Delta f) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^R (\tilde{f}(\widetilde{\Delta g}) - (\widetilde{\Delta f})\tilde{g}) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\tilde{f} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} \tilde{f} \right) d\theta \Big|_{r=\epsilon}^R = \int_{\partial D_{\epsilon, R}} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} g \right) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

[別解] 佐竹紘彰作: 少し問題を改作したもののだが、

$$\nabla(f \cdot \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \nabla \nabla g = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g$$

より $f \Delta g = \nabla(f \cdot \nabla g) - \nabla f \cdot \nabla g$ に注意する。Gauss の定理より

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nabla(f \cdot \nabla g) dx dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div}(f \cdot \nabla g) dx dy \\ &= \int_{\partial \Omega} f \nabla g \cdot n dS = \int_{\partial \Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dS. \end{aligned}$$

ここで、 f と g の役割をとり変えたものを考え、辺々加えれば良い。しかし、これでは問題の解答自身にはなっていないが、半分程の点を与えた。□

追試予想問題：Gauss の定理の具体的に与えた領域での証明を問題として出す予定である。

(ii)[5] 求めたい式は (i) の記号を使えば、 $[\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2] \tilde{f}(r, \theta) = 0$ ならば

$$\tilde{f}(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(R, \theta) d\theta$$

となる。これを示そう。

f, g が C^2 であることと積分の定義から、(3) で $\epsilon \rightarrow 0$ とできて

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^R (\tilde{f}(\widetilde{\Delta g}) - (\widetilde{\Delta f})\tilde{g}) r dr d\theta \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left(\tilde{f} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} \tilde{g} \right) d\theta \Big|_{r=\epsilon}^R = \int_{\partial D_R} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} g \right) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

この(4)で $\Delta f = 0, g = 1$ とすれば

$$0 = \int_{\partial D_R} \frac{\partial f}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(R, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) d\theta \Big|_{r=R}.$$

上式は R だけではなく任意の $0 < r < R$ で成立することに注意する。 θ 方向による積分と r 方向の微分の順序を入れ替えることができ、

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r, \theta) d\theta = 0$$

が従う。

これを r について $(0, R)$ で積分して

$$0 = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(R, \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \tilde{f}(0, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(a + R \cos \theta, b + R \sin \theta) d\theta - 2\pi f(a, b). \quad \square$$

4a 積分値 $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ を以下のようにして求めよ。

$\alpha \geq 0$ に対し関数 $F(\alpha)$ を $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$ と定める。このとき、

(i) $\frac{dF}{d\alpha}$ を α と $\log(1+\alpha)$ を用いて表せ。

(ii) $F(1)$ を求めよ。 (Hint: $F(0) = 0$ より $F(1) = F(1) - F(0) = \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha} \right) d\alpha$ である。)

解答例：(i)[5] $F(\alpha)$ を α で微分するのだが、形式的に、微分を積分記号下で実行し、部分分数分解

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right\}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx \stackrel{*}{=} \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} dx \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right\} \end{aligned}$$

となる。積分と微分の順序変更 $*$ が許されることの証明：

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\log(1+h\frac{x}{1+\alpha x})}{h(1+x^2)} dx,$$

ここで、 $z = \frac{x}{1+\alpha x}$ とおくと $0 \leq z \leq 1$ であり、収束

$$\frac{1}{h} \log(1+hz) \rightarrow z \quad (h \rightarrow 0)$$

は $z \in [0, 1]$ に関し一様だから、極限と積分の順序が変更できて、上で行なった順序変更が正当化できる。 \square

(ii)[5] (i) 及びヒントと

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha = \tan^{-1} \alpha \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} \log(1+\alpha^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

を用い、『 $x \in [0, 1]$ に関し一様に $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \log(1+\alpha x) = \log(1+x)$ だから、極限と積分の順序が変更できて』、

$$\begin{aligned} F(1) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} F(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha} \right) d\alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha - \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha)}{(1+\alpha^2)} d\alpha \\ &= \frac{\log 2}{2} \arctan \alpha \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} \log 2 - F(1). \end{aligned}$$

これより、 $F(1) = \frac{\pi}{8} \log 2$. \square

4b 積分値 $\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt$ を以下のようにして求めよ。

(i) $f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt$ を x に関して整級数展開せよ (ヒント：Taylor 展開と項別積分定理を用いよ)。

(ii) Abel の定理を用いよ (ここで $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ 、 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} = \pi^2/8$ は既知としてよい)。

解答例：(i)[5] $f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt$ として x に関して整級数展開する。これを $x=0$ で Taylor 展開するのではなく、被積分関数を

$$\frac{\log(1+t)}{t} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{n-1} + \dots$$

と Taylor 展開²し、これを項別積分して

$$\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt = x - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n + \dots$$

¹右辺の積分の被積分関数は $t=0$ で定義されていないので広義積分の意味

² $\log(1+t)$ を $t=0$ で Taylor 展開せよ

となる。

(ii)[5] 上式右辺は $x = 1$ で収束することは Leibniz の定理で示される。そこで Abel の定理より

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots$$

となる。ところで上の右辺の級数は絶対収束するから、和の順序を変えて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4 \cdot 6} = \frac{\pi^2}{12}. \quad \square$$

5 $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$, $y \in \mathbb{R}^3$ とするとき、

$$\int_B \cos(x, y) dx = \frac{4\pi}{|y|^2} \left(\frac{\sin |y|}{|y|} - \cos |y| \right)$$

なることを示せ。ここで、 $(x, y) = \sum_{j=1}^3 x_j y_j$, $|y|^2 = (y, y)$ とする。

[略解例] [10]: まず $|y| \neq 0$ の場合を考える。必要ならば図形を動かして、ベクトル $y \in \mathbb{R}^3$ は x_1 -軸上にある、即ち、 $y = {}^t(y_1, 0, 0)$ $|y_1| = |y|$ と仮定して一般性を失わない。すると、

$$\iiint_B \cos(x, y) dx = \iiint_B \cos(x_1 y_1) dx_1 dx_2 dx_3$$

となるので、座標を $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) = {}^t(x_1, r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), $r^2 = |x_1 + x_2^2|^2$, $\tan \theta = x_2/x_1$ と極座標変換すれば

$$\tilde{B} = \{(x_1, r, \theta) \mid -1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq r^2 + x_1^2 \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad dx_2 dx_3 = r dr d\theta$$

となる。

$$\iiint_B \cos(x_1 |y|) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-1}^1 \int_{\{0 \leq r^2 \leq 1 - x_1^2\}} \int_0^{2\pi} \cos(x_1 |y|) dx_1 r dr d\theta$$

を Fubini の定理を用いて計算すると

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1 - x_1^2}{2} \cos(x_1 y_1) dx_1$$

となる。この式から $y_1 > 0$ として一般性を失わないことが見て取れるので、 $t = x_1 |y|$ と変数変換すれば

$$= 2\pi \int_{-|y|}^{|y|} \frac{|y|^2 - t^2}{2|y|^3} \cos t dt$$

となることに注意する。簡単な計算で

$$\int_{-|y|}^{|y|} \cos t dt = 2 \sin |y|, \quad \int_{-|y|}^{|y|} t^2 \cos t dt = \int_{-|y|}^{|y|} t^2 (-\cos t)'' dt = 2|y|^2 \sin |y| + 4|y| \cos |y| - 4 \sin |y|$$

となるから、

$$\iiint_B \cos(x_1 |y|) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4\pi}{|y|^2} \left(\frac{\sin |y|}{|y|} - \cos |y| \right).$$

上の計算は $|y| \neq 0$ として計算しているが、 $|y| = 0$ の場合、左辺は単に 3次元単位球の体積だから、その値は $4\pi/3$ となる。また、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin t}{t} - \cos t \right) = \frac{1}{3}$$

に注意すれば、 $|y| = 0$ のときにも、問題に与えられた式は成立することが分る。 \square