解析概論II　第10回講義内容（2004年12月10日）　12.30. 増補

◎ 中間試験実施：
日時：12月17日（金曜日)、15時00分—18時00分 (⇐ **時間変更**)
試験場：本館　H 131 教室、
試験範囲：Riemann-Stieltjes 積分、多次元広義 R 積分！専ら計算してもらう。

=======

1　曲線：１変数関数の積分論復習と有界変動関数

2　多次元 Riemann 積分

3　広義 Riemann 積分

4　多次元 Riemann 積分記号下での変数変換

5　パラメータ付き多次元 Riemann 積分

5.1　一様収束と項別積分

5.2　パラメータ付き積分

定理 5.1 Ω を $\mathbb{R}^n$ の体積確定な有界閉集合、I を任意の１次元区間、$K=\Omega\times I$ とおく。$f(x,t)$ $(x\in\Omega,\ t\in I)$ が K 上連続ならば
(1) $F(t)=\displaystyle\int_\Omega f(x,t)dx$ は I 上連続であり、
(2) 更に $\partial f/\partial t$ が K 上で連続ならば、F は I 上 C^1 級で

$$F'(t)=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

が成立する。

証明：J を I に含まれる任意の有界閉区間として (1)、(2) を示せば良い。そこで、定理における J と I の役割を読み替えて、$I=[a,b]$ として (1)、(2) を示す。
(1) $f(x,t)=f_t(x)$ とおく。コンパクト集合 K 上 f は連続だから一様連続、即ち、任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ があって、$(x,t),(y,s)\in K$ で

$$|(x,t)-(y,s)|<\delta \Longrightarrow |f(x,t)-f(y,s)|<\epsilon$$

となる。これは言い換えると

$$|t-s|<\delta \Longrightarrow |f_t(x)-f_s(y)|<\epsilon\ (\forall x\in\Omega) \quad 即ち \quad \|f_t-f_s\|<\epsilon.$$

故に、$|t-s|<\delta$ のとき

$$|F(t)-F(s)| \leq \int_\Omega |f_t(x)-f_s(x)|dx \leq \|f_t-f_s\||\Omega| \leq \epsilon|\Omega|.$$

これより F は I 上で一様連続となる。
(2) $\partial f/\partial t$ が K 上一様連続ならば、(1) により

$$G(t)=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

は I 上連続である。任意の $s\in I$ に対し

$$\begin{aligned}\int_a^s G(t)dt = \int_a^s \left[\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx\right]dt &\overset{(i)}{=} \int_\Omega \left[\int_a^s \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt\right]dx \\ &\overset{(ii)}{=} \int_\Omega (f(x,s)-f(x,a))dx = F(x)-F(a)\end{aligned}$$

ここで (i) は Fubini の定理、(ii) は微積分の基本定理による。この式より、再度微積分の基本定理により、$F'(s)=G(s)$ $(s\in I)$ となる。これより G は連続だから $F\in C^1(I)$ となる。 □

例：$a>0, b>0$ として積分値

$$I_a=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x dx}{(a\cos^2 x+b\sin^2 x)^2},\quad I_b=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x dx}{(a\cos^2 x+b\sin^2 x)^2}$$

は以下の積分を a と b に関して偏微分して得られる。

$$J(a,b)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}.$$

定義 5.1 $D=[a,b)$ を $\mathbb{R}$ の区間、I を集合とし $D\times I$ 上の関数 $f(x,t)$ が、任意の $u\in D$ に対し、x について $[a,u]$ で R 可積分とし

$$F_u(t)=\int_a^u f(x,t)dx$$

とおく。I 上の関数族 $\{F_u\}_{u\in D}$ が $u\to b$ $(u<b)$ のとき

$$F(t)=\lim_{u\to b-0}\int_a^u f(x,t)dx\left(=\int_a^{b-0} f(x,t)dx \quad \text{とも書く}\right) \tag{1}$$

に I 上一様収束するとき、広義積分(1) は t に関し I 上一様収束するという。$I\subset\mathbb{R}^n$ で I に含まれるコンパクト集合 K 上で一様収束するとき、(1) は I 上一様収束するという。

定理 5.2 $J=[a,b)$ とし、I を一つの集合とする。関数 $f(x,t):J\times I\to\mathbb{R}$ に対し J 上の関数 $M(x)$ があって
(i) $|f(x,t)|\leq M(x)$ $(\forall x\in J,\ \forall t\in I)$,
(ii) $\exists \int_a^b M(x)dx=\lim_{u\to b}\int_a^u M(x)dx,$
とする。このとき広義積分 $\int_a^b f(x,t)dx=F(t)$ は I 上一様収束する

証明：(ii) より $M_u=\int_a^u M(x)dx \to M_b=\int_a^{b-0} M(x)dx$ だから、関数の極限に関する Cauchy 条件より以下が成り立つ：任意の $\epsilon>0$ に対して $c\in[a,b)$ があって、$c<u\leq v<b$ なる任意の u,v に対し

$$\left|M_v-M_u\right|<\epsilon$$

となる。故に、$c < u \le v < b$ と任意の $t \in I$ に対し (i) により

$$\big|F_v(t) - F_u(t)\big| = \left|\int_a^v f(x,t)dx - \int_a^u f(x,t)dx\right| \le \int_v^u |f(x,t)|dx \le \int_v^u M(x)dx = M_v - M_u$$

即ち

$$\|F_v - F_u\| \le \big|M_v - M_u\big| < \epsilon$$

が成り立つ。これより、関数族 $\{F_u\}_{U\in J}$ は I 上で一様 Cauchy 条件を満たすから I 上で一様収束する。 □

定理 5.3 $J = [c,d)$ とし、I は $\mathbb{R}$ の区間とする。連続関数 $f : J \times I \to \mathbb{R}$ に対し広義積分

$$F(t) = \int_c^{d-0} f(x,t)dx$$

が I 上一様収束するとき、以下が成立する：
(1) F は I 上連続である。
(2) I に含まれる任意の有界閉区間 $[a,b]$ で

$$\int_a^b F(t)dt = \int_c^{d-0}\left[\int_a^b f(x,t)dt\right]dx.$$

証明：(1) 任意の $u \in [c,d)$ をとり

$$F_u(t) = \int_c^u f(x,t)dx$$

とおく。関数 F_u は I 上連続で、連続関数族 $\{F_u\}_{u\in J}$ が I 上 F に広義一様収束するから、F は I 上連続である。

(2) Fubini の定理より

$$\int_a^b F_u(t)dt = \int_c^u \left[\int_a^b f(x,t)dt\right]dx.$$

$\{F_u\}_{u\in J}$ は $[a,b]$ 上で F に一様収束するから、項別積分定理より $u \to d-0$ のとき上式左辺は $\displaystyle\int_a^b F(t)dt$ に収束する。 □

定理 5.4 $J = [c,d)$、I は $\mathbb{R}$ の区間とし、連続関数 $f : J \times I \to \mathbb{R}$ は以下の仮定を満たすとする：
(a) 任意の $t \in I$ に対し広義積分 $F(t) = \displaystyle\int_c^{d-0} f(x,t)dx$ が存在する。
(b) $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ が $J \times I$ 上で存在し連続。
(c) $G(t) = \displaystyle\int_c^{d-0} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$ は I 上広義一様収束する。

このとき F は I 上 C^1 級であり、

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_c^{d-0} f(x,t)dx = \int_c^{d-0} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx = G(t). \tag{2}$$

証明：(b), (c) と定理 5.3(1) より、$G(t)$ は I 上で連続である。I の任意の有界閉区間 $[a,s]$ をとると、定理 5.3(2) と微積分の基本定理 I より

$$\int_a^s G(t)dt = \int_c^{d-0}\left[\int_a^s \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right]dx = \int_c^{d-0}[f(x,s) - f(x,a)]dx = F(s) - F(a)$$

となる。微積分の基本定理 II より F は微分可能で(2) が成立する。 □

5.2.1 B 関数の性質–パラメタ付き積分の例として

任意の $x>0, y>0$ をパラメタとして積分

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \quad B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

を Gamma 関数、Beta 関数と命名しその性質を前に少し述べた。

定理 5.5 任意の $x>0, y>0$、$n\in\mathbb{N}$ に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned}
&(1)\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\\
&(2)\ \Gamma(1)=1,\\
&(3)\ \Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots x\Gamma(x),\\
&(4)\ \Gamma(n+1)=n!,\\
&(5)\ \Gamma(x)>0,\\
&(6)\ 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2x-1}dr=\Gamma(x),\\
&(7)\ B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta=B(y,x),\\
&(8)\ B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\\
&(9)\ \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=\frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma((n+2)/2)},\\
&(10)\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma((2n+1)/2)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ (n\in\mathbb{N}),
\end{aligned}$$

証明：丁度良い演習問題である、各自計算されることを期待する。

定理 5.6 *(1)* $\Gamma(x)$ は $x>0$ で連続のみならず C^∞ 級であり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}(\log\ t)^n dt. \tag{3}$$

(2) $\log\Gamma(x)$ は $x>0$ で凸関数である。

注意：凸関数の定義とか、そうなるための十分条件を思い出しておいて欲しい。

証明：(1) 任意の $\alpha>0$ に対し $\log t=-x$ とおくと

$$\lim_{t\to+0} t^\alpha \log t=\lim_{x\to+\infty}(-x)e^{-\alpha x}=0$$

となる。これより $\log t=O(t^{-\alpha})$ $(t\to+0)$ であるから、$f_n(x,t)=e^{-t}t^{x-1}(\log t)^n$ とおくと $f_n(x,t)=O(t^{x-n\alpha-1})$ $(t\to+0)$ である。だから、$\forall x>0$ に対し $0<\alpha<x/n$ なるように α をとれば $f_n(x,t)=O(t^\lambda)$ $(\lambda>-1)$ となる。これより $\int_0^1 f_n(x,t)dt$ は絶対収束する。また、$x_0>0$ を固定すれば $x_0\le x, 0<t\le 1$ で $|f_n(x,t)|\le|f_n(x_0,t)|$ だから $x_0\le x$ で上の積分は一様収束する。

一方、$\log t/t\to 0$ $(t\to+\infty)$ より $\log t=0(t)$ $(t\to+\infty)$ である。また、任意の m に対して $e^{-t}=O(t^{-m})$ だから、$f_n(x,t)=O(t^{x+n-1-m})$ $(t\to+\infty)$ となる。m を十分大きくとって $x+n-1-m<-1$ とすれば $\int_1^{+\infty} f_n(x,t)dt$ が収束することが示せる。任意に $x_1>0$ を固定したとき、$x\le x_1, 1\le t$ のとき

$|f_n(x,t)| \le |f_n(x_1,t)|$ だから、この積分は $x \le x_1$ で一様収束する。これらより、広義積分(3) が $(0,+\infty)$ 上広義一様収束することが示された。定理 5.4 より $\Gamma(x)$ は $x>0$ で何回でも微分可能で n 回導関数は(3) で与えられることは数学的帰納法で示される。特に $\Gamma(x)$ は $x>0$ で連続である。

(2) 任意の $u \in \mathbb{R}$ に対し式(3) を用いて

$$\Gamma(x)u^2 + 2\Gamma'(x)u + \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}(u^2 + 2u\log t + (\log t)^2)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}(u+\log t)^2 dt \ge 0$$

となる。これは u に関する 2 次方程式の判別式 D が

$$D/4 = \Gamma'(x)^2 - \Gamma(x)\Gamma''(x) \le 0$$

となることを意味する。これを用い

$$(\log \Gamma(x))'' = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} \ge 0$$

となる。故に、$\log \Gamma(x)$ は凸関数となる。 $\square$

定理 5.7 (Gamma 関数の特徴付け) 関数 $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ が任意の $x>0$ に対して

$$(i)\ f(x+1) = xf(x), \quad (ii)\ f(x) > 0 \text{ であり } \log f(x) \text{ は凸関数}, \quad (iii)\ f(1) = 1$$

であるとする。このとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x) \quad \textit{(Euler の公式)}$$

が成立する。

証明：(i) $n \ge 1$ なる自然数に対し

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x)$$

となるから、$x = 1$ と、(iii) から $f(n+1) = n!$ が従う。(ii) より $g(x) = \log f(x)$ は凸関数なのだから $0 < a < t < b$ に対し

$$\frac{g(t)-g(a)}{t-a} \le \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \le \frac{g(b)-g(t)}{b-t}$$

が成立する。この関係式を $0 < x \le 1$, $2 \le n \in \mathbb{N}$ に対して適用して

$$\begin{aligned}\log(n-1) = \log f(n) - \log f(n-1) &\le \frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x} \quad ((a,t,b) = (n-1,n,n+x)) \\ &\le \log f(n+1) - \log f(n) = \log n \quad ((a,t,b) = (n,n+x,n+1))\end{aligned}$$

この式に x を掛け、それを指数関数の肩に乗せ $f(n)$ を掛けて

$$(n-1)^x f(n) \le f(n+x) \le n^x f(n) \quad (0 < x \le 1)$$

となるから、これを $(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x$ で割って

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)^x f(n)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x} \le \frac{f(n+x)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x} &= f(x) \\ \le \frac{n^x f(n)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}&\end{aligned}$$

が得られる。この式で n は任意だったから、$n-1$ を n に置き換え、$f(n+1)=n!$ を用いて

$$a_n(x)=\frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}\le f(x)\le\frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}\cdot\frac{x+n}{n}$$

となる。これより

$$0\le f(x)-a_n(x)\le a_n(x)\left(\frac{x+n}{n}-1\right)\le f(x)\frac{x}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

即ち、f の表示式が従う。上では $0<x\le 1$ の場合であったが、この表示式は $x>0$ で成立することを示す。実際、$x=y+m,\,0<y\le 1m\in\mathbb{N}$ とおくとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^y n!}{(y+n)(y+n-1)\cdots(y+1)y}\frac{n^m(y+m-1)\cdots(y+1)y}{(y+n+m)\cdots(y+n+1)}\\&=(y+m-1)\cdots(y+1)yf(y)=f(y+m)=f(x)\end{aligned}$$

となるからである。ここで $\lim_{n\to\infty}n^m/[(y+n+m)\cdots(y+n+1)]=1$ なることを用いた。

ところで $\Gamma(x)$ も定理の条件 (i), (ii), (iii) を満たすから、表示式が成立するが、この表示式における極限は唯一つだから $f(x)=\Gamma(x)$ となる。 $\square$

ところで

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log\,m\right)$$

が収束することは以下のように示される：

$$0<u_n=\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}=\int_0^1\frac{t}{n(n+t)}dt\le=\int_0^1\frac{dt}{n^2}=\frac{1}{n^2}$$

より $\sum_{n=1}^\infty u_n<\infty$ となる。これと

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log\,m\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^m u_n+\log\frac{m+1}{m}\right)=\sum_{n=1}^\infty u_n$$

から γ（=Euler 数）が存在する。Gamma 関数については、この Euler 数を用いて次の無限積表示がある。これは $z\in\mathbb{C}$ に対して成立して

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right]\quad(Weierstrass'sformula)$$

更に、

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

5.2.2 The Laplace Method

定理 5.8 U を $\mathbb{R}^d$ の原点の開近傍とし、ある $c>0$ に対し $\bar{B}_c\subset U$ なるものとする。但し、$\bar{B}_c$ は開球 $B_c=\{x\in\mathbb{R}^d\mid|x|<c\}$ の閉包とする。$\varphi(x),a(x)\in C^\infty(\bar{U})$ は、ある定数 b_1,b_2 があって、$\|\varphi\|_{C^0(U)}\le b_1$ 及び $\|a\|_{C^0(U)}\le b_2$ を満たすとする。ここで Hess $\varphi(0)=$ Hess $\Re\varphi(0)$ は正定値行列で、更にある $p>0$ があって

$$\begin{gathered}p|x|^2\le x\cdot\mathrm{Hess}\,\varphi(0)x\quad(\forall x\in\mathbb{R}^d),\\\Re(\varphi(x)-\varphi(0))\ge p|x|^2/4\quad(\forall x\in U).\end{gathered}\tag{4}$$

とする。このとき

$$\int_U e^{-\lambda\varphi(x)}a(x)dx=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2}\frac{e^{-\lambda\varphi(0)}}{(\det\mathrm{Hess}\,\varphi(0))^{1/2}}\bigl(a(0)+O(\lambda^{-1})\bigr)\quad(\lambda\to\infty)\tag{5}$$

が従う。ここで、$O(\lambda^{-1})$ は、c, b_1, b_2, p と d にのみよる定数 C があって、任意の $\lambda > 1$ に対して $|O(\lambda^{-1})| \leq C\lambda^{-1}$ なることとする。

証明：まず以下の主張を示そう：

主張 5.1 $H = \mathrm{Hess}\ \varphi(0)$ とおき $a \in C_0^\infty(U)$ に対し

$$\begin{aligned}&\int_U e^{-\lambda x\cdot Hx/2}a(x)dx \\ &= \Big(\frac{2\pi}{\lambda}\Big)^{d/2}(\det H)^{-1/2}\Big[a(0) + \frac{\nabla\cdot H^{-1}\nabla}{2\lambda}a(0) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\nabla\cdot H^{-1}\nabla}{2\lambda}\Big)^2 a(0) + O(\lambda^{-3})\Big] \quad as \quad \lambda \to \infty.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、b_2, p と d にのみよる定数 C があって、任意の $\lambda > 1$ に対して $|O(\lambda^{-3})| \leq C\lambda^{-3}$ とする。

主張の証明: 積分記号下の変数変換により

$$\int_U e^{-\lambda x\cdot Hx/2}a(x)dx = (\det H)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda y^2/2}a(H^{-1/2}y)dy.$$

一方、Taylor 展開を用いて

$$a(H^{-1/2}y) = \sum_{j=0}^{5}\frac{(H^{-1/2}y\cdot\nabla_x)^j a(0)}{j!} + R_6(y)$$

となる。ここで

$$R_6(y) = \sum_{|\alpha|=6}\frac{(H^{-1/2}y)^\alpha}{6!}\int_0^1(1-t)^6(\partial^\alpha a)(tH^{-1/2}y)dt.$$

故に、

$$\int_U e^{-\lambda x\cdot Hx/2}a(x)dx = (\det H)^{-1/2}\Big(\sum_{j=0}^{5}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda y^2/2}\frac{(H^{-1/2}y\cdot\nabla_x)^j a(0)}{j!}dy + \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda y^2/2}R_6(y)dy\Big). \quad \square$$

定理 5.8 の証明の続き: 上の積分で $j = 1, 3, 5$ に相当するものは 0 であり、$j = 0$ より (5) の第 1 項が得られる。

B_c 上で $\chi(x) = 1$ かつ $0 \leq \chi(x) \leq 1$ なる $\chi(x) \in C_0^\infty(U)$ をとる。

$$\int_U e^{-\lambda\varphi(x)}a(x)dx = \int_U e^{-\lambda\varphi(x)}a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx + \int_U e^{-\lambda\varphi(x)}a(x)(1-\chi(\lambda^{1/3}x))dx.$$

$\varphi(x) = \varphi(0) + x\cdot Hx/2 + r(x)$ を用いて

$$r(x) = \frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3}x^\alpha\int_0^1(1-t)^2(\partial^\alpha\varphi)(tx)dt \tag{7}$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_U e^{-\lambda\varphi(x)}a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx &= e^{-\lambda\varphi(0)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda x\cdot Hx/2}e^{-\lambda r(x)}a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx \\ &= e^{-\lambda\varphi(0)}\lambda^{-d/3}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda^{1/3}y\cdot Hy/2}b_\lambda(y)dy\end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで $y = \lambda^{1/3}x$ で

$$b_\lambda(y) = \exp\Big[-\frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3}y^\alpha\int_0^1(1-t)^2(\partial^\alpha\varphi)(t\lambda^{-1/3}y)dt\Big]a(\lambda^{-1/3}y)\chi(y). \tag{9}$$

ここで、$\lambda > 1$ に無関係な定数 $\exists C_m > 0$ があって $\sup_y |\partial_y^\alpha b_\lambda(y)| \le C_m$, $|\alpha| \le m$ となる。これより(6) を上式右辺に適用して

$$\int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)\chi(\lambda^{1/3}x)dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2} \frac{e^{-\lambda\varphi(0)}}{(\det H)^{1/2}}(a(0) + 0(\lambda^{-1}))$$

即ち、c, b_1, b_2, p にのみよる定数 C があって $|0(\lambda^{-1})| \le C\lambda^{-1}$ となる。

式(9) の第 2 項は以下のように評価される：

$$\begin{aligned}\left| \int_U e^{-\lambda\varphi(x)} a(x)(1-\chi(\lambda^{1/3}x))dx \right| &\le e^{-\lambda\Re\varphi(0)} \|a\|_{C^0} \int_U e^{-\lambda p|x|^2/4} |1-\chi(\lambda^{1/3}x)|dx \\ &\le e^{-\lambda\Re\varphi(0)} \|a\|_{C^0} e^{-p\lambda^{1/3}c^2/8} \int_U e^{-p\lambda^{1/3}x^2/8} dx.\end{aligned}$$

これらより、望みの結果が得られる。　　$\Box$.

注意：講義では鞍点法といったが、むしろ Laplace の方法といった方が良いだろう。

5.2.3　停留点の方法（Method of Stationary Phase）

Feynman 積分は、数学的には Schrödinger 方程式の解の $\hbar$ 依存性を明らかにするのを目的としている、解の新しい表示方法であると考えられる。

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{2M}\Delta + V(x)\right]u, \quad u(x,0) = \underline{u}(x)$$

の解は積分核 $K(t,x,y)$ を用いて

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x,y)\underline{u}(y)dy$$

と書ける[1]のだが、ここで重要なのは $K(t,x,y)$ の以下の表示である。

$$\begin{gathered} K(t,x,y) = \int_{C_{t,x,y}} e^{-i\hbar S(\gamma)} d_F\gamma, \\ C_{t,x,y} = \{\gamma(\cdot) \in ([0,t] : \mathbb{R}^n) \mid \gamma(0) = y,\ \gamma(t) = x\}, \\ S(\gamma) = \inf_{\gamma \in C_{t,x,y}} \int_0^t L(\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))d\tau, \\ L(\gamma, \dot\gamma) = \frac{1}{2M}|\dot\gamma|^2 - V(\gamma) \end{gathered}$$

で、$d_F\gamma$ は $C_{t,x,y}$ の Lebesgue 的測度と想定されるもので、数学的には存在しない事が証明されているものである。

この表示が何故重要かは、有限次元空間のときは以下の定理が成立することで、それの類似から $\lambda = \hbar^{-1}$ として Bohr の対応原理が成立することを容易に想定させる[2]からである。以下、もっとも簡単な版を単純な形で述べておこう。

積分

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda S(x)} u(x)dx \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

の $\lambda \to \infty$ での挙動について考える。

[1] ここは今まで習ってきたような普通の積分と考えない方が良い
[2] 現時点では、この想定には重大な欠陥がある

定理 5.9 (Method of Stationary Phase) $S(x)$ を実数値 C^2 級関数とし。$\nabla S(x_0) = 0$ かつ $\det(\partial^2 S/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$ を満たす点 $x_0 \in \mathrm{supp}\ u$ が唯一つ存在するとする。$\lambda \in \mathbb{R}$ で $|\lambda| \geq 1$ のとき

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \left|\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|^{-1/2} u(x_0) \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right] \quad (\lambda \to \infty).$$

ここで $f(\lambda) \sim g(\lambda)$ とは $\lambda \to \infty$ のとき $|f(\lambda) - g(\lambda)| = 0(\lambda^{-(n/2)-1})$ とする。

注意：C を複素平面 z での閉曲線、$f(z)$ と $u(z)$ を z の解析関数とし積分

$$I(\lambda) = \int_C e^{i\lambda f(z)} u(z) dz$$

の $\lambda \to \infty$ での挙動を調べる方法を鞍点法 (Saddle point method) という。これについては、見通しの良い一般論は知られていないと思われる。

%%%%%

メモ：受講者は 20 名前後。前回の講義録に Riemann 積分論の拡張として HK 積分を述べておいたが、それからの連想だろう「微分の拡張はあるのですか？」という S 君の質問があった。もっともな質問である。

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \phi \text{ の台は compact}\}$$

とし、f を局所的に積分可能な関数、$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ とする。もし f が x_j-方向に偏微分可能ならば部分積分の公式から

$$\langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \varphi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx = -\langle f, \partial_{x_j} \varphi \rangle$$

となる。これから、もし f が普通の意味では微分可能でなくても f は超関数の意味で微分可能でそれを $\partial_{x_j} f$ と書き、左辺を右辺で定義する。この概念をより拡張できて、それにより局所的可積分ではない関数、Dirac の δ 関数 $\delta(x)$ というもの、

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) (= \langle \delta, \varphi \rangle)$$

に数学的に正当な意味をつけることができるようになる。