9. パラメータ付き Riemann 積分 1

問題 9.1: $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x,t)=\frac{2x^2t}{(x^2+t^2)^2}$ できめる。

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 f(x,t)\,dt, \qquad \int_0^1 \lim_{x\to 0} f(x,t)\,dt$$

を求めよ。

問題 9.2: $0<p<1$ とする。

(1) $0<\epsilon<1$ とする。級数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{p+k-1}$ は $[\epsilon, 1-\epsilon]$ 上一様に $\frac{x^{p-1}}{1+x}$ に収束することを示せ。

(2)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p+k}$$

を示せ。

(3)

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p-k}$$

を示せ。（ヒント：変数変換 $y=\frac{1}{x}$ を用いて、(2) を利用）。

問題 9.3: $F(x)=\int_0^{\pi/2}\log(1+x\cos^2 t)\,dt$ とおく。$(x>-1)$

(1) $F'(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\right)$ を示せ。

(2) $F(x)$ を求めよ。

問題 9.4: つぎを示せ。

(1) $0\le r<1$ のとき

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)\,d\theta=0.$$

（ヒント：r について微分してみる）

(2) $r\ge 1$ のとき

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)\,d\theta=2\pi\log r.$$

（ヒント：(1) を利用）

問題 9.5: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(a)=\int_0^1\frac{e^{-a^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ できめる。

(1) $f'(a)=-2e^{-a^2}\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

(2) (1) を用いて

$$f(a)+\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

を示せ。

(3) (2) で $a\to\infty$ の極限をとることで、$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ。

問題 9.6: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は連続とする。$\int_0^1 f(t)t^n\,dt=0$ が 全ての非負整数 n で成り立てば $f=0$ であることを示せ。

問題 9.7: $[0,\infty)$ 上の関数 $f(x)=e^{-x^2}$ は $[0,\infty)$ 上一様に多項式で近似できないことを示せ。

問題 9.8: f は $[0,1]$ 上の連続関数とする。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,dt}{\int_0^1 t^n\,dt}=f(1)$$

を示せ。