12. ベクトル解析 2

問題 12.1: ベクトル場 $F(x, y, z) = (x; y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$ のつぎの曲線 C_1, C_2 に沿っての線積分を求めよ。

(1) C_1: $(0,0,0)$ から $(1,1,1)$ に至る線分。

(2) C_2: 折れ線 $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,1)$.

問題 12.2: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上定義されたベクトル場 $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ を考える。C^1-曲線 C は原点を通らず、極座標で $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ $(a \le t \le b)$ とパラメータ付けられるとする。このとき

$$\int_C F = \theta(b) - \theta(a)$$

が成り立つことを示せ。

問題 12.3: ベクトル場 F がある関数 f によって $F = \mathrm{grad} f$ とかける時、F はポテンシャル f を持つという。ベクトル場 F が ポテンシャル f (C^1-級とする) を持てば線積分は $\int_C F = f(c(b)) - f(c(a))$ で与えられることを示せ。ここで C のパラメータ表示を $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ とした。これを用いて次のベクトル場の線積分を求めよ。ここで C は $(1,2,3)$ から $(4,5,6)$ にいたる C^1-曲線とする ((2) では原点を通らないものだけ考える)。また $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。

(1) $m > 0$, $g > 0$ として $F(x,y,z) = (0,0,-mg)$.

(2) $k \in \mathbb{R}$ として $F(x,y,z) = \frac{k}{r^3}(x,y,z)$.

(3) $k > 0$ として $F(x,y,z) = -k(x,y,z)$.

問題 12.4: $a > 0$ とする。

(1) 円筒 $\{(x,y,z) : x^2+y^2 = ax\}$ とボール $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ の交わりの面積を求めよ。

(2) 球面 $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ と円柱 $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le ax\}$ の交わりの面積を求めよ。

問題 12.5: yz-平面内の $(2,0)$ を中心とする半径 1 の円を z-軸に関して一回転して得られる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を T とする。

(1) T は $\phi : (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) \to T$, $(\alpha,\phi) \mapsto ((2+\cos\theta)\cos\alpha, (2+\cos\theta)\sin\alpha, \sin\theta)$ とパラメータ付けられることを確かめよ。

(2) T の面積を求めよ。

問題 12.6:

(1) 角度 α $(0 < \alpha < 2\pi)$ で交わる $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ の 2 つの大円によって囲まれる集合 S_α の面積は 2α であることを示せ。

(2) 3つの S_α, S_β, S_γ の共通部分として表せる内角が α, β, γ である S^2 の三角形を $\triangle_{\alpha\beta\gamma}$ とおく。$\triangle_{\alpha\beta\gamma}$ の面積は $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ であることを示せ。