2004 年度後期解析Ａ演習

1. 曲線の長さ

問題 1.1: $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を、長さ有限な曲線 C の一つのパラメータ表示とする。$c \in (a, b)$ に対して曲線 C_1, C_2 をそれぞれ f の $[a, c]$, $[c, b]$ への制限によりパラメータ表示される曲線とする。このとき $\ell(C) = \ell(C_1) + \ell(C_2)$ を示せ。ここで $\ell(C)$, $\ell(C_1)$, $\ell(C_2)$ はそれぞれ C, C_1, C_2 の長さを表す。

問題 1.2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は連続な周期 $T > 0$ の写像とする（$f(t) = f(t + T)$ が全ての $t \in \mathbb{R}$ について成り立つ）。つぎの 2 つの連続写像 $[0, T] \to \mathbb{R}^n$ をパラメータ表示に持つ曲線 C_1, C_2 を考える。ここで $k \in \mathbb{N}$ とする。

$$C_1 : \ f_1 : [0, T] \to \mathbb{R}^n, \quad f_1(t) = f(t), \qquad C_2 : \ f_2 : [0, T] \to \mathbb{R}^n, \quad f_2(t) = f(kt).$$

C_1 が長さ有限ならば C_2 も長さ有限であることを示し、$\ell(C_2)$ を $\ell(C_1)$ を用いて表せ。

問題 1.3: $f_1, f_2 : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続で、そのグラフ $\Gamma_{f_i} = \{(x, f_i(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$ $(i = 1, 2)$ の長さは有限とする。このとき

(1) $|f_1| : I \to \mathbb{R}$ のグラフの長さも有限で、その長さは Γ_{f_1} の長さ以下であることを示せ。

(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して $(af_1)(x) = af(x)$ できまる関数のグラフ Γ_{af} の長さは有限であることを示せ。

(3) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ できまる関数のグラフ $\Gamma_{f_1+f_2}$ の長さは有限であることを示せ。

問題 1.4: 連続関数 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ が次の (1) または (2) を満たす時、そのグラフ Γ_f の長さは有限であることを示せ。

(1) f は単調関数である（単調非減少または単調非増加）。

(2) f は Lipshitz 連続である。つまり定数 $L > 0$ が存在して $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ がすべての $x, y \in I$ に対して成り立つ。

問題 1.5: $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を f' が連続であるような曲線 C のパラメータ表示とする。このとき C の長さ $\ell(C)$ は

$$\ell(C) = \int_a^b |f'(t)| \, dt$$

で与えられることを示せ。

問題 1.6: $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を長さ有限な曲線 C のパラメータ表示とする。$x \in [a, b]$ に対して、曲線 C_x を f の $[a, x]$ への制限でパラメータ表示される曲線とする。C_x の長さ $\ell(C_x)$ は x の連続関数であることを示せ。

問題 1.7: $\theta_1, \theta_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は連続であるとする。次のパラメータ表示をもつ曲線 C_1, C_2 を考える：

$$f_1(t) = e^{i\theta_1(t)}, \quad f_2(t) = e^{i\theta_2(t)}.$$

今 C_1, C_2 は閉曲線（つまり $f_1(0)=f_1(1)$, $f_2(0)=f_2(1)$ が成り立つ）で同じ曲線（i.e., f_1, f_2 は同値なパラメータ表示）を表すとする。このとき

$$\theta_1(1)-\theta_1(0)=\theta_2(1)-\theta_2(0)$$

が成り立つことを示せ。

また $\theta_1(1)-\theta_1(0)=\theta_2(1)-\theta_2(0)$ を満たすが、異なる曲線のパラメータ表示を与える例を与えよ。

2. 有界変動関数

問題 2.1: 有界変動関数は有界であることを示せ。

問題 2.2: $f, g : I=[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界変動関数とする。このとき

(1) $f+g$, af $(a\in\mathbb{R})$ は有界変動関数であることを示せ。

(2) fg $((fg)(x)=f(x)g(x))$ は有界変動関数であることを示せ。

問題 2.3: 関数 $f : I=[a,b]\to\mathbb{R}$ が有界変動関数であるための必要十分条件は f のグラフ Γ_f の長さが有限であることであることを示せ。

問題 2.4: つぎの関数の与えられた区間における全変動を求めよ。

(1) $f_1(x)=\sin x$ の $[0,2\pi]$ における全変動および $[0,t]$ $(t\in[0,2\pi])$ における全変動。

(2) $f_2(x)=3x^2-2x^3$ の $[-2,2]$ における全変動および $[0,t]$ $(t\in[-2,2])$ における全変動。

(3) $f_3(x)=x-[x]$ の $[0,3]$ における全変動および $[0,t]$ $(t\in[0,3])$ における全変動。

(4) $f_5(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ の $[0,1]$ における全変動。

問題 2.5: $\alpha\in\mathbb{R}$ とする。$[0,1]$ 上の関数

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x} & \text{if } 0<x\le 1\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

が有界変動であるための必要十分条件は $\alpha>1$ であることを示せ。

問題 2.6: $f : I=[a,b]\to\mathbb{R}^n$ は有界変動で、f の $[a,x]$ における全変動を $V_f(x)$ と書くことにする。$V_f(x)$ が x の連続関数ならば、f は連続であることを示せ。