「解析概論第２中間試験問題」 12 月 17 日, H131, pm 15.00–pm 18.00, 井上

● 問題は４題、答案用紙は４枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい（試験後１週間以内に e-mail で私宛に送ってくれるのがもっとも望ましい)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない！

＝＝＝＝＝＝

（１）平面上に面積 S、周長 L の 凸４角形 T を与える。平面上の一点 (x, y) から４角形 T (内部を含む) までの距離を $D(x,y) = \inf_{{}^t(\xi,\eta)\in T} \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^{1/2}$ とするとき、以下の積分値を S と L を用いて書き表せ。

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-D(x,y)} dxdy.$$

[試験中のヒント]: (i)(1 時間後のヒント) 凸４角形として 正方形 $T_S = [-a, a] \times [-a, a]$ を考る。(ii)(2 時間後のヒント) 正方形の辺をすべて両側に延長して、空間 $\mathbb{R}^2$ を分割すること、それぞれの分割の中で $D(x, y)$ がどういう値になるか？

（２）以下の広義積分は如何なる $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ について収束するか確かめ、かつ、その積分値を求めよ。

$$\iiint_{x>0,y>0,z>0} (1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{-1} dxdydz.$$

Hint:以下の式は無条件で用いてよい。$p > 0,\ q > 0$ とすると、

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{p-1} dy,$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p} dx = \frac{1}{p}\Gamma(\frac{q}{p})\Gamma(1-\frac{q}{p}) = \pi(p \sin \frac{q}{p}\pi)^{-1} \qquad \text{但し } p > q > 0.$$

[試験中のヒント]:$A = 1 + x^\alpha + y^\beta \geq 1$ とおく。 $1 > 1/\gamma > 0$ のとき $\displaystyle\int_{z>0} (A + z^\gamma)^{-1} dz$ はどうなるか考えよ。

（３） $f(x)$ を $[0, \infty)$ 上で C^1 級で、 $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ が収束するとする。 $b > a > 0$ のとき以下を示せ。

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \log \frac{a}{b}.$$

[試験中のヒント]: $\displaystyle f(bx) - f(ax) = \int_{ax}^{bx} f'(t)dt = ?\int_a^b f'(?)ds$ はどうなるか考えよ。

（４） 有界関数 f が有界変動関数 φ に関し $[a, b]$ 上 RS 可積分ならば

$$\left| \int f d\varphi \right| \leq \|f\| V(a, b : \varphi)$$

が成立することを証明せよ。但し、以下の記号を用いた：

$$\|f\| = \sup |f|,\ V(a, b : \varphi) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} v_\Delta,\ v_\Delta = \sum_{i=1}^m |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|,\ \Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b.$$

[試験中のヒント]:定義に戻って考えよ。