「2004 解析概論第 2–中間試験解答例」

12 月 17 日, pm 15.00–pm 18.00, 井上

（1）平面上に面積 S、周長 L の 凸 4 角形 T を与える。平面上の一点 (x, y) から 4 角形 T (内部を含む) までの距離を $D(x,y) = \inf_{t(\xi,\eta)\in T} \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)^{1/2}$ とするとき、以下の積分値を S と L を用いて書き表せ。

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-D(x,y)} dxdy.$$

[試験中のヒント]:凸 4 角形として 正方形 $T_S = [-a, a] \times [-a, a]$ を考え、それによって空間 $\mathbb{R}^2$ を分割すること、それぞれの分割の中で $D(x, y)$ がどういう値になるか？

[略解例][10]:（ヒントでは正方形 $T_S = [-a, a] \times [-a, a]$ といったが、長方形にした方が見通しが良い部分がある）まず見当をつけるため、 凸 4 角形として 長方形 $T_S = [-a, b] \times [-c, d]$ $(a, b, c, d > 0)$ を取って計算してみよう。$\mathbb{R}^2$ を分割して

$$T_S = [-a, b] \times [-c, d],$$
$$L_1 = \{(x, y) \mid -c \le y \le d,\ x \ge b\}, \quad L_2 = \{(x, y) \mid -a \le x \le b,\ y \ge d\},$$
$$L_3 = \{(x, y) \mid -c \le y \le d,\ x \le -a\}, \quad L_4 = \{(x, y) \mid -a \le x \le b,\ y \le -c\},$$
$$G_1 = \{(x, y) \mid y \ge d,\ x \ge b\}, \quad G_2 = \{(x, y) \mid y \ge d,\ x \le -a\},$$
$$G_3 = \{(x, y) \mid y \le -c,\ x \le -a\}, \quad G_4 = \{(x, y) \mid y \le -c,\ x \ge b\}.$$

$(x, y) \in T_S$ では $D(x, y) = 0$ となるから

$$\iint_{T_S} e^{-D(x,y)} dxdy = (b + a)(d + c) = S.$$

$(x, y) \in L_1$ で $D(x, y) = x - b$ となるから、Fubini の定理を用いて

$$\iint_{L_1} e^{-D(x,y)} dxdy = \int_{-c}^{d} \left[\int_b^\infty e^{-D(x,y)}\right] dy = \int_{-c}^{d} \left[\int_b^\infty e^{-(x-b)}\right] dy = d + c$$

となる。他の G_* に対しても同様に計算して

$$\iint_{L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4} e^{-D(x,y)} dxdy = 2(b + a + d + c) = L \ (\Longleftarrow 21 \text{ 日分 HP には計算違い有り}).$$

$(x, y) \in G_1$ では $D(x, y) = \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2)}$ となるから、原点を (b, d) に平行移動して、別の言葉でいえば、

$$x = b + r\cos\theta,\ y = d + r\sin\theta,\ r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi/2$$

と変数変換すれば $D(x, y) = r$ となるから、Fubini の定理を用いて

$$\iint_{G_1} e^{-D(x,y)} dxdy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^\infty e^{-r} r dr\right] d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

これらから、

$$\iint_{G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4} e^{-D(x,y)} dxdy = 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

結局

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-D(x,y)} dxdy = S + L + 2\pi.$$

一般の凸 4 角形 $ABCD$ に対しては、辺 AB の端点 A から辺 AB に垂直に凸 4 角形の外向きの直線 $A1$ 端点 B から辺 AB に垂直に凸 4 角形の外向きの直線 $B1$, CB の端点 C から辺 CB に垂直に凸 4 角形の外向きの直線 $C2$ 端点 B から辺 CB に垂直に凸 4 角形の外向きの直線 $B2$, と直線を引いてを分割する。直線 $A1$, 直線

$B1$, 辺 AB で囲まれる四角形無限領域 ($\sim L_1$)、直線 $B2$, 直線 $C2$, 辺 CB で囲まれる四角形無限領域 ($\sim L_2$)、直線 $B1$, 端点 B, 直線 $B2$ で囲まれる扇形無限領域 ($\sim G_1$) として計算すればよい。正方形や長方形のときの計算のみで、この部分の注意無しの場合は少し減点。

（2）以下の広義積分は如何なる $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ について収束するか確かめ、かつ、その積分値を求めよ。

$$\iiint_{x>0,y>0,z>0} (1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{-1}dxdydz.$$

[試験中のヒント]:$A = 1+x^\alpha+y^\beta \geq 1$ とおく。 $1 > 1/\gamma > 0$ のとき $\displaystyle\int_{z>0}(A+z^\gamma)^{-1}dz$ はどうなるか考えよ。

[略解例][10]: $A = 1+x^\alpha+y^\beta \geq 1$ とおく。 $1 > 1/\gamma > 0$ のとき $A^{1/\gamma}z = u$ と変数変換して

$$\int_{z>0}(A+z^\gamma)^{-1}dz = A^{1/\gamma-1}\int_{u>0}(1+u^\gamma)^{-1}du = A^{1/\gamma-1}\Gamma(1/\gamma)\Gamma(1-1/\gamma)$$

となる。次に $B = 1+x^\alpha \geq 1$ とおく。$B^{1/\beta}y = s$ と変数変換して

$$\int_{y>0}(B+y^\beta)^{1/\gamma-1}dy = B^{1/\beta+1/\gamma-1}\int_0^\infty (1+s^\beta)^{1/\gamma-1}ds.$$

$1+s^\beta = 1/v$ と変数変換して、$1 > 1/\beta > 0, \quad 1/\gamma+1/\beta < 1$ の時

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1+s^\beta)^{1/\gamma-1}ds &= \frac{1}{\beta}\int_0^1 v^{-1/\gamma-1/\beta}(1-v)^{1/\beta-1}dv \\ &= \frac{\Gamma(1-1/\gamma-1/\beta)\Gamma(1/\beta)}{\alpha\Gamma(1-1/\gamma)}.\end{aligned}$$

$1+x^\alpha = 1/w$ と変数変換して、$1 > 1/\alpha > 0, \quad 1/\gamma+1/\beta+1/\alpha < 1$ の時

$$\int_0^\infty (1+x^\alpha)^{1/\beta+1/\gamma-1}dx = \frac{\Gamma(1-1/\gamma-1/\beta-1/\alpha)\Gamma(1/\alpha)}{\beta\Gamma(1-1/\beta-1/\gamma)}.$$

$$\iiint_{x>0,y>0,z>0}(1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma)^{-1}dxdydz = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1/\beta)\Gamma(1/\gamma)\Gamma(1-1/\gamma-1/\beta-1/\alpha).$$

（3）$f(x)$ を $[0,\infty)$ 上で C^1 級で、 $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ が収束するとする。 $b > a > 0$ のとき、

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = f(0)\log\frac{a}{b}.$$

[試験中のヒント]: $f(bx)-f(ax) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} f'(t)dt = ?\int_a^b f'(?)ds$ はどうなるか考えよ。

[略解例][10]: 広義積分の定義から

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx$$

この式に、$f(x) \in C^1[0,\infty)$ から従う次式

$$f(bx)-f(ax) = \int_{ax}^{bx} f'(t)dt = x\int_a^b f'(sx)ds$$

を代入すると

$$\int_0^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_0^R\left\{\int_a^b f'(sx)ds\right\}dx = \iint_{(x,s)\in[0,R]\times[a,b]} f'(sx)dxds.$$

そこで、積分の順序変更を試みる。

$$\iint_{(x,s)\in[0,R]\times[a,b]} f'(sx)dxds = \int_a^b \left\{\int_0^R f'(sx)dx\right\}ds = \int_a^b \frac{1}{s}\left\{\int_0^{sR} f'(y)dy\right\}ds$$
$$= \int_a^b \frac{1}{s}(f(sR)-f(0))ds = \int_a^b \frac{f(sR)}{s}ds + f(0)\log\frac{a}{b}.$$

ここで仮定を用いて

$$\int_a^b \frac{f(sR)}{s}ds = \int_a^b \frac{f(sR)}{sR}d(sR) = \int_{aR}^{bR}\frac{f(z)}{z}d(z) \to 0 \quad (R\to\infty). \qquad \square$$

[別解]:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0, R\to\infty}\int_\epsilon^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx.$$

$0<\epsilon<<1<<R<\infty$ ではそれぞれの項が積分可能で

$$\int_\epsilon^R \frac{f(bx)}{x}dx = \int_{b\epsilon}^{bR}\frac{f(y)}{y}dy$$

となる。故に、

$$\int_\epsilon^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_{b\epsilon}^{bR}\frac{f(y)}{y}dy - \int_{a\epsilon}^{aR}\frac{f(y)}{y}dy$$
$$= \int_{aR}^{bR}\frac{f(y)}{y}dy - \int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(y)}{y}dy$$

ここで、第１項は仮定から $\lim_{R\to\infty}\int_{aR}^{bR}\frac{f(y)}{y}dy = 0$,

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(y)}{y}dy = \int_a^b \frac{f(\epsilon y)}{y}dy,$$

f は C^1-級だから $f(z)=f(0)+zf'(\theta z)$ $0<\theta<1$ となるが $\epsilon>0$ が小さい限り $z\in[0,1]$ と考えてよい。故に、極限 $\epsilon\to 0$ と積分 $\int_a^b$ が交換できて

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \frac{f(\epsilon y)}{y}dy = f(0)\log\frac{b}{a}. \qquad \square$$

（４） 有界関数 f が有界変動関数 φ に関し $[a,b]$ 上 RS 可積分ならば

$$\left|\int f d\varphi\right| \le \|f\|\, V(a,b:\varphi)$$

が成立することを証明せよ。但し、以下の記号を用いた：

$$\|f\| = \sup|f|,\ V(a,b:\varphi) = \sup_{\Delta\in\mathcal{D}} v_\Delta,\ v_\Delta = \sum_{i=1}^m |\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|,\ \Delta : a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b.$$

[試験中のヒント]:定義に戻って考えよ。

[略解例][10]: 定義より

$$\int f d\varphi = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^m f(\xi_i)|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|$$

であるから、極限を取る前の絶対値を取って

$$\left|\sum_{i=1}^m f(\xi_i)|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|\right| \le \sum_{i=1}^m \|f\||\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})| = \|f\|v_\Delta.$$

メモ：21 日にアップした HP では、私のケアレスミスで (1) の答えが $S+2L+2\pi$ となっていた。このミスを最初に指摘してくれた S 君には幾分のボーナス点を与えた。