「解析概論第２期末追試験問題」　2005.02.23,　井上

● 問題は４題、答案用紙は４枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい（試験後１週間以内に e-mail で私宛に送っても良い)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない！

＝＝＝＝＝＝

[1] 積分値 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ を以下のようにして求めよ。
$\alpha \geq 0$ に対し関数 $F(\alpha)$ を $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$ と定める。このとき、

(i) $\dfrac{dF}{d\alpha}$ を α と $\log(1+\alpha)$ を用いて表せ。

(ii) $F(1)$ を求めよ。$\left(\text{Hint: } F(0)=0 \text{ より } F(1) = F(1)-F(0) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha \text{ である。}\right)$

[2] $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$、$y \in \mathbb{R}^3$ とするとき、

$$\int_B \cos(x,y)dx = \frac{4\pi}{|y|^2}\left(\frac{\sin|y|}{|y|} - \cos|y|\right)$$

なることを示せ。ここで、$(x,y) = \sum_{j=1}^3 x_j y_j$、$|y|^2 = (y,y)$ とする。

[3] $f \in C[-1,1]$ のとき、以下を示せ。

$$\lim_{\epsilon\to 0+0} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2} f(x)dx = f(0).$$

[4] (i) 整級数

$$x + \frac{a-b}{2!}x^2 + \frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3 + \frac{(a-b)(a-2b)(a-3b)}{4!}x^4 + \cdots$$

の収束半径を求めよ。
(Hint: 整級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ に対し、d'Alembert の判定法では $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$ が存在すれば R が、Cauchy の判定法では $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} = R$ が存在すれば R $(0 \leq R \leq \infty)$ が収束半径を与えた)
(ii) 関数項級数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{nx^{n-1}}{x^n - (1+n^{-1})^n}$$

は $|x| < 1$ で絶対収束することを示せ。
(Hint: $|x| < 1$ で $|x^n - (1+n^{-1})^n|$ は 0 から離れている）