

[1] 積分値 $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ を以下のようにして求めよ。

$\alpha \geq 0$ に対し関数 $F(\alpha)$ を $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$ と定める。このとき、

(i) $\frac{dF}{d\alpha}$ を α と $\log(1+\alpha)$ を用いて表せ。

(ii) $F(1)$ を求めよ。 (Hint: $F(0) = 0$ より $F(1) = F(1) - F(0) = \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha$ である。)

[略解例] (i)[15] $F(\alpha)$ を α で微分するのだが、形式的に、微分を積分記号下で実行し、部分分数分解

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right\}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx \stackrel{*}{=} \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} dx \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right\} \end{aligned}$$

となる。積分と微分の順序変更^{*}が許されることの証明：

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\log(1+h\frac{x}{1+\alpha x})}{h(1+x^2)} dx,$$

ここで、 $z = \frac{x}{1+\alpha x}$ とおくと $0 \leq z \leq 1$ であり、収束

$$\frac{1}{h} \log(1+hz) \rightarrow z \quad (h \rightarrow 0)$$

は $z \in [0, 1]$ に関し一様だから、極限と積分の順序が変更できて、上で行なった順序変更が正当化できる。 \square

(ii)[15] (i) 及びヒントと

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha = \tan^{-1} \alpha \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} \log(1+\alpha^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

を用い、 $\forall x \in [0, 1]$ に関し一様に $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \log(1+\alpha x) = \log(1+x)$ だから、極限と積分の順序が変更できて、

$$\begin{aligned} F(1) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} F(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha - \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha)}{(1+\alpha^2)} d\alpha \\ &= \frac{\log 2}{2} \arctan \alpha \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} \log 2 - F(1). \end{aligned}$$

これより、 $F(1) = \frac{\pi}{8} \log 2$. \square

[2] $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ 、 $y \in \mathbb{R}^3$ とするとき、

$$\iiint_B \cos(x, y) dx = \frac{4\pi}{|y|^2} \left(\frac{\sin |y|}{|y|} - \cos |y| \right)$$

なることを示せ。ここで、 $(x, y) = \sum_{j=1}^3 x_j y_j$ 、 $|y|^2 = (y, y)$ とする。

[略解例] [30] $|y| = 0$ の場合、左辺は単に3次元単位球の体積だから、その値は $4\pi/3$ となる。

$|y| \neq 0$ の場合を考える。必要ならば図形を動かして、ベクトル $y \in \mathbb{R}^3$ は x_1 -軸上にある、即ち、 $y = {}^t(y_1, 0, 0)$ $|y_1| = |y|$ と仮定して一般性を失わない。すると、

$$\iiint_B \cos(x, y) dx = \iiint_B \cos(x_1 y_1) dx_1 dx_2 dx_3$$

となるので、座標を $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) = {}^t(x_1, r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), $r^2 = |x_2 + x_3^2|^2$, $\tan \theta = x_2/x_1$ と極座標変換すれば

$$\tilde{B} = \{(x_1, r, \theta) \mid -1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq r^2 + x_1^2 \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad dx_2 dx_3 = r dr d\theta$$

となる。

$$\iiint_B \cos(x_1 |y|) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-1}^1 \int_{\{0 \leq r^2 \leq 1 - x_1^2\}} \int_0^{2\pi} \cos(x_1 |y|) dx_1 r dr d\theta$$

を Fubini の定理を用いて計算すると

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1 - x_1^2}{2} \cos(x_1 |y|) dx_1$$

となる。この式から $y_1 > 0$ として一般性を失わないことが見て取れるので、 $t = x_1 |y|$ と変数変換すれば

$$= 2\pi \int_{-|y|}^{|y|} \frac{|y|^2 - t^2}{2|y|^3} \cos t dt$$

となることに注意する。簡単な計算で

$$\int_{-|y|}^{|y|} \cos t dt = 2 \sin |y|, \quad \int_{-|y|}^{|y|} t^2 \cos t dt = \int_{-|y|}^{|y|} t^2 (-\cos t)'' dt = 2|y|^2 \sin |y| + 4|y| \cos |y| - 4 \sin |y|$$

となるから、

$$\iiint_B \cos(x_1 |y|) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4\pi}{|y|^2} \left(\frac{\sin |y|}{|y|} - \cos |y| \right).$$

上の計算は $|y| \neq 0$ として計算しているが、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin t}{t} - \cos t \right) = \frac{1}{3}$$

に注意すれば、 $|y| = 0$ のときにも、問題に与えられた式は成立することが分る。 \square

[3] $f \in C[-1, 1]$ のとき、以下を示せ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} f(x) dx = f(0).$$

[略解例] [30] $x/\epsilon = y$ と変数変換すれば

$$\int_{-1}^1 \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} f(x) dx = \int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{1}{1 + y^2} f(\epsilon y) dy \rightarrow f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy.$$

ここで、積分と極限 $\epsilon \rightarrow 0$ の順序変更が許されることは、

定理 0.1 $J = [a, b)$ とし、 I を一つの集合とする。関数 $f(x, t) : J \times I \rightarrow \mathbb{R}$ に対し J 上の関数 $M(x)$ があって

(i) $|f(x, t)| \leq M(x)$ ($\forall x \in J, \forall t \in I$),

(ii) $\exists \int_a^b M(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u M(x) dx$,

とする。このとき広義積分 $\int_a^b f(x, t) dx = F(t)$ は I 上一様収束する

を $J = (-\infty, \infty)$ 、 $I = (0, 1) \ni \epsilon f(x, \epsilon) = \chi_{[-\epsilon, \epsilon]}(x) f(\epsilon x) \frac{1}{1+x^2}$ 、 $M(x) = \frac{1}{1+x^2} \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ として適用すればよい。□

[4] (i) 整級数

$$x + \frac{a-b}{2!}x^2 + \frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3 + \frac{(a-b)(a-2b)(a-3b)}{4!}x^4 + \dots$$

の収束半径を求めよ。

(Hint: 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し、d'Alembert の判定法では $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$ が存在すれば R が、Cauchy の判定法では $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-1/n} = R$ が存在すれば R ($0 \leq R \leq \infty$) が収束半径を与えた)

(ii) 関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{x^n - (1+n^{-1})^n}$$

は $|x| < 1$ で絶対収束することを示せ。

(Hint: $|x| < 1$ で $|x^n - (1+n^{-1})^n|$ は 0 から離れている)

[略解例] (i)[15] $c_n = \frac{\prod_{j=2}^n (a - (j-1)b)x^n}{n!}$ とおく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a-nb}{n+1} \right| |x| = |b||x|$$

となる。故に $|bx| < 1$ ならば d'Alembert の判定条件より求める級数は絶対収束する。即ち、級数の収束半径は $|b|^{-1}$ である。

(ii)[15] $|x| < 1$ で、絶対値に関する三角不等式と二項展開を用いて

$$|x^n - (1+n^{-1})^n| \geq (1+n^{-1})^n - |x^n| \geq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k} - 1 = 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \dots - 1 > 1$$

となる。これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx^{n-1}}{x^n - (1+n^{-1})^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |nx^{n-1}|.$$

この最後の級数は $|x| < 1$ で絶対収束している。□