「解析概論第２期末試験問題」　2005.02.07,　井上

● 問題は５題、答案用紙は５枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい（試験後１週間以内に e-mail で私宛に送っても良い)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない！

＝＝＝＝＝＝

（１）区分的に C^1-級の境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と、$\overline{\Omega}$ 上の C^2-級関数 f, g に対し Green の公式が成立する：

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} g \right) ds.$$

但し、 n は単位外向き法線ベクトル、右辺は $\partial\Omega$ 上の線積分。

(i) $\epsilon \geq 0$ とする。この公式を特に Ω が $D_{\epsilon,R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \epsilon \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq R\}$ の場合に極座標を用いて表現し直し、証明せよ。

(ii) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < R\}$ とし、f を $\overline{D}_R$ 上の C^2 級関数で $\Delta f = 0$ なるものとする。この時、(i) で $g = 1$ とすることによって以下を示せ。

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) d\theta.$$

（２）$[0,1] \times [0,1]$ 上の連続関数 $f(x,y)$ で

$$f(x,y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(s,t) dsdt$$

を満たすものは高々一つしかないことを証明せよ。

（３）累次積分 $I = \displaystyle\int_{-2}^2 \left(\int_{y^2}^4 \sqrt{x} y^2 e^{x^3} dx \right) dy$ について以下に答よ。

(a) 積分範囲を図示せよ。

(b) 積分順序を変更し、先に y で積分する形にしてみよ。

(c) I を計算せよ（ヒント：くれぐれも、最初の形のままでの積分を計算をしないように)。

(4) Abel の定理を用いて以下の級数の値を求めよ。

$$(i) \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{4n+1}, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}.$$

Hint: Abel の定理：級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ が収束するとする。

1) $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ は $I = [0,1]$ 上一様収束する。($f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ と記す)

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n$ が成り立つ。

（５）$\mathbb{R}^3$ の C^2 級ベクトル場 G で rot $G = {}^t(2x, 3yz, -xz^2)$ を満たすものは存在しないことを示せ。