2004年度「解析概論第II」期末試験解答例、採点方法、成績優秀者

2005.02.21. 修正3

＝＝＝＝

追試：2月23日（水）10.00–12.30 本館2F 数学科第5演習室（H224A号室）
答案返却：2月23日（水）追試験終了後数学科談話室にて

＝＝＝＝

（1）区分的に C^1-級の境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と、$\overline{\Omega}$ 上の C^2-級関数 f, g に対し Green の公式が成立する：

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.$$

但し、 n は単位外向き法線ベクトル、右辺は $\partial\Omega$ 上の線積分。

(i) $\epsilon \geq 0$ とする。この公式を特に Ω が $D_{\epsilon,R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \epsilon \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq R\}$ の場合に極座標を用いて表現し直し、証明せよ。

(ii) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < R\}$ とし、f を $\overline{D}_R$ 上の C^2 級関数で $\Delta f = 0$ なるものとする。この時、(i) で $g = 1$ とすることによって以下を示せ。

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)d\theta.$$

[略解例] (i)[20] (a,b) を中心とする極座標をとる。$x - a = r\cos\theta, y - b = r\sin\theta$ $(0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおき、$u(x,y)$ に対し $\tilde{u}(r,\theta) = u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ と記す。この時、

$$\widetilde{(\Delta u)}(r,\theta) = [\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2]\tilde{u}(r,\theta)$$

となることは、1年次微分積分学の基本的修得事項（結局、試験中にヒントとして黒板に書いた）。2年次になって少々詳しく習った積分記号下の変数変換公式により

$$\iint_{D_{\epsilon,R}} f(x,y)\Delta g(x,y)dxdy = \iint_{(\epsilon,R)\times(0,2\pi)} \tilde{f}(r,\theta)\widetilde{(\Delta g)}(r,\theta)\, rdrd\theta$$

となる。重積分から累次積分に直して部分積分すると

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^R \tilde{f}\partial_r^2\tilde{g}\, rdr &= [r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}]\big|_\epsilon^R - \int_\epsilon^R \partial_r(r\tilde{f})\partial_r\tilde{g}\, dr \\ &= R\tilde{f}\partial_r\tilde{g} - \epsilon\tilde{f}\partial_r\tilde{g} - \int_\epsilon^R \partial_r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}\, rdr - \int_\epsilon^R \tilde{f}\partial_r\tilde{g}\, dr,\end{aligned}$$

かつ

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}\frac{1}{r}\partial_r\tilde{g}\, rdr = [\tilde{f}\tilde{g}]\big|_\epsilon^R - \int_\epsilon^R \tilde{g}\frac{1}{r}\partial_r\tilde{f}\, rdr.$$

f と g の役割を変えて計算すると

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}\big(\partial_r^2\tilde{g} + \frac{1}{r}\partial_r\tilde{g}\big)\, rdr - \int_\epsilon^R \tilde{g}\big(\partial_r^2\tilde{f} + \frac{1}{r}\partial_r\tilde{f}\big)\, rdr = [r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}]\big|_\epsilon^R - [r\tilde{g}\partial_r\tilde{f}]\big|_\epsilon^R. \tag{1}$$

故に、上式を θ に関して積分し、円環領域 $D_{\epsilon,R}$ の外側の境界で ∂_r は外向きの法線微分、内側の境界で $-\partial_r$ は外向きの法線微分を与えることに注意する。すると、

$$\int_0^{2\pi} R\tilde{f}(R,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(R,\theta) - \int_0^{2\pi} \epsilon\tilde{f}(\epsilon,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(\epsilon,\theta) = \int_{\partial D_{\epsilon,R}} f\frac{\partial g}{\partial n}ds. \tag{2}$$

また任意の r で

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}\partial_\theta^2\tilde{g}d\theta = -\int_0^{2\pi} \partial_\theta\tilde{f}\partial_\theta\tilde{g}d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{g}\partial_\theta^2\tilde{f}d\theta$$

なることに注意すると、(1) より

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\epsilon,R}}(f\Delta g - g\Delta f)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^R(\tilde{f}\widetilde{(\Delta g)} - \widetilde{(\Delta f)}\tilde{g})\,rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}\,\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}\,\tilde{g}\right)d\theta\Big|_{r=\epsilon}^R = \int_{\partial D_{\epsilon,R}}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.\end{aligned} \tag{3}$$

(ii)[20] 求めたい式は (i) の記号を使えば、$[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2]\tilde{f}(r,\theta) = 0$ ならば

$$\tilde{f}(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(R,\theta)d\theta$$

となる。これを示そう。

f, g が C^2 であることと積分の定義から、(3) で $\epsilon\to 0$ とできて

$$\begin{aligned}\iint_{D_R}(f\Delta g - g\Delta f)dxdy &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^R(\tilde{f}\widetilde{(\Delta g)} - \widetilde{(\Delta f)}\tilde{g})\,rdrd\theta \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}\,\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}\,\tilde{g}\right)d\theta\Big|_{r=\epsilon}^R = \int_{\partial D_R}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.\end{aligned} \tag{4}$$

この(4) で $\Delta f = 0$, $g = 1$ とすれば

$$0 = \int_{\partial D_R}\frac{\partial f}{\partial n}ds = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(R,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)d\theta\Big|_{r=R}.$$

上式は R だけではなく任意の $0 < r < R$ で成立することに注意する。θ 方向による積分と r 方向の微分の順序を入れ替えることができて、

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(r,\theta)d\theta = 0$$

が従う。

これを r について $(0,R)$ で積分して

$$0 = \int_0^{2\pi}\tilde{f}(R,\theta)d\theta - \int_0^{2\pi}\tilde{f}(0,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)d\theta - 2\pi f(a,b). \qquad \square$$

（２）$[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数 $f(x,y)$ で

$$f(x,y) = 1 + \int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt \qquad (*)$$

を満たすものは高々一つしかないことを証明せよ。

[略解例][15] (*) を満たす f, g が二つあったすると、その差 $u = f - g$ は

$$u(x,y) = \int_0^x\int_0^y u(s,t)dsdt \qquad (**)$$

を満たす。考える領域は $[0,1]\times[0,1]$ でそこで u は連続だから $\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}|u(x,y)| = K$ が存在する。(**) で絶対値をとり、これを代入して $|u(x,y)| \le Kxy$ が得られる。これを (**) に代入して $|u(x,y)| \le K\dfrac{x^2}{2}\dfrac{y^2}{2}$

が得られる。故に、数学的帰納法で任意の自然数 n に対して $|u(x,y)| \le K\dfrac{x^n}{n!}\dfrac{y^n}{n!}$ が得られる。即ち、任意の自然数 n、任意の $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ に対して $|u(x,y)| \le \dfrac{K}{n!n!}$ となる。これより、$u(x,y)=0$ である。 $\Box$

（３）累次積分 $I = \displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2}^{4}\sqrt{x}y^2e^{x^3}dx\right)dy$ について以下に答よ。

(a) 積分範囲を図示せよ。

(b) 積分順序を変更し、先に y で積分する形にしてみよ。

(c) I を計算せよ（ヒント：くれぐれも、最初の形のままでの積分を計算をしないように)。

[略解例] (a)[5] $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4,\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\}$ が積分範囲である。図示は易しいだろう。

(b)[5] Fubini の定理より

$$I = \int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2}^{4}\sqrt{x}y^2e^{x^3}dx\right)dy = \iint_D \sqrt{x}y^2e^{x^3}dxdy = \int_0^4\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\sqrt{x}y^2e^{x^3}dy\right)dx.$$

(c)[10] 変数変換 $\tau = x^3$ を用いた簡単な計算で

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \sqrt{x}e^{x^3}\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}y^2dy\right)dx = \int_0^4\sqrt{x}e^{x^3}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\right)dx \\ &= \frac{2}{3}\int_0^4 x^2e^{x^3}dx = \frac{2}{9}\int_0^{4^3}e^{\tau}\tau = \frac{2}{9}(e^{64}-1). \qquad \Box \end{aligned}$$

（４）Abel の定理を用いて以下の級数の値を求めよ。

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}.$$

Hint: Abel の定理：級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとする。

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $I=[0,1]$ 上一様収束する。($f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と記す)

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が成り立つ。

[略解例] (i)[15]: 次式

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} \quad (|x|<1)$$

は区間 $I_\delta = [0, 1-\delta]$ (任意の $\delta > 0$) で一様収束。故に項別積分できて

$$\int_0^x \frac{1}{1+y^4}dy = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1} \quad (|x| \le 1-\delta).$$

交代級数和に関する Leibnitz の定理より $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$ は収束する。故に、問題中に述べた Abel の定理より上式の右辺は $x=1$ まで連続であり、左辺の積分の上端を $x=1$ ととれる。これより

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1\frac{1}{1+y^4}dy.$$

一方、任意の有理関数は原始関数を持ち、実際

$$\int\frac{1}{1+y^4}dy = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)] \tag{5}$$

となる。だから

$$\int_0^1\frac{1}{1+y^4}dy = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\frac{\pi}{2}]$$

となる。

(5) の証明：$1+y^4=(1+y^2)^2-2y^2=(1+\sqrt{2}y+y^2)(1-\sqrt{2}y+y^2)$ と

$$\frac{1}{1+y^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{-y+\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1}+\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}y+1}\Big),$$

より

$$\int\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}y+1}dy=\frac{1}{2}\log(y^2+\sqrt{2}y+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{y^2+\sqrt{2}y+1}dy,$$
$$\int\frac{y-\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1}dy=\frac{1}{2}\log(y^2-\sqrt{2}y+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{y^2-\sqrt{2}y+1}dy$$

となる。更に、$y^2\pm\sqrt{2}y+1=2^{-1}[1+(\sqrt{2}y\pm1)^2]$ より変数変換 $\sqrt{2}y\pm1=t$ を用い

$$\int\frac{1}{y^2\pm\sqrt{2}y+1}dy=\sqrt{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}y\pm1)$$

となる。

(ii)[10]: 上記と同じ理由で関数 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}x^{2n+1}$ は $[0,1]$ 上一様収束し、項別微分して

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n}=\log(1+x^2),\quad g(0)=0$$

Abel の定理より $g(1-0)$ が求めたい値で、それは部分積分すれば

$$\int_0^1\log(1+x^2)dx=[x\log(1+x^2)]|_0^1-\int_0^1 dx\frac{2x^2}{1+x^2}=\log2-2+2[\arctan x]|_0^1=\log2-2+\frac{\pi}{2}.$$

ここで、最初の版では $2[\arctan x]|_0^1$ の 2 が落ちていた。

（5）$\mathbb{R}^3$ の C^2 級ベクトル場 G で $\mathrm{rot}\ G(x,y,z)={}^t(2x,3yz,-xz^2)$ を満たすものは存在しないことを示せ。
[略解例][10] C^2 級ベクトル場 $G(x,y,z)={}^t(G_1(x,y,z),G_2(x,y,z),G_3(x,y,z))$ で $\mathrm{rot}\ G(x,y,z)={}^t(2x,3yz,-xz^2)$ となるものが存在したとする。明らかに、任意の (x,y,z) で $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\ G(x,y,z))=0$ でなければならないが、

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\ G(x,y,z))=\mathrm{div}\,({}^t(2x,3yz,-xz^2))=2+3z-2xz\not\equiv0,$$

これは矛盾である。　$\square$

====

メモ：受験者 31 名。2,3 名はこの試験の前「文系課目」の試験を受けてからきたようだから、結局 5 時 20 分迄試験続行した。勿論最初からの者は 4 時間やっていたことになるが、それで差別がついたと問題になることはあるまい（実際、途中参加で早期提出者もあった？）。考えようでは 3 時間の人は別の課目の試験を受けられ、時間を有効に使ったのだから。

(1) では、質問があったし、どうして良いか分らない者が多数いたので、Δf の局座標による変数変換公式を書き上げ説明し、$\frac{\partial f}{\partial n}$ が「方向微分」で四角形の場合や円の場合どうなるかも図示した。

(2) は微分方程式のとき用いた手法と積分の絶対値は上から被積分関数の絶対値の積分で押さえられることを用いれば良い。一意性を示すのに、2 つあればそれには差がない、という論法に思い至らなかった者も多かった。

(3)、(5) は勉強してきた諸君には極めて易しかったようである。

(4) では与えられた級数が収束することを保証するために「Leibnitz の定理」があることを説明した。それにもかかわらず、単に「Leibnitz の定理によりこの級数は収束する」等と書いた者と、「交代級数で各項の絶対値が単調に 0 に収束しているから」と表現し証明を与えた者との差は大きい。

採点は以下のように極めて甘いものである。40(中間)+30(演習)+110(期末)=180、得点を x とするとき $x \geq 120$ を 100 とし、それ以下を 60+2/3(x-60)、$x < 60$ はそのままを得点とした。感想は $60 > x > 55$ の人を 60 とするために用いた。以下は 80 点以上の人々である。

谷本祥, 鈴木貴士, 坪田識稔, 阿部直=田中智 $\geq$ 100,

古賀智裕, 牧野志郎, 河野誠=福富平記 $\geq$ 90,

前田至賢, 小松啓伸, 森本裕介, 山田耕史=小川友彬, 荒井翔大=田口雄涼 $\geq$ 80.

このような甘さはまずいのかもしれないが、これで少しはやる気になってくれれば幸いである。
物事を甘く考えないために、20(中間)+30(演習)+50(期末)=100 と正規化した場合の結果を書いておく。

谷本祥 84, 鈴木貴士 82, 不合格者半数以上となる。

追試験実施：山口慶晃 02-24521 君の要請により解析学概論第 II の追試験を行なう。尚、今期の期末試験で失敗した人の学籍番号（02-00621, 02-20090, 03-05633）、極めて成績が悪い者（03-16677, 03-22330）、それらの人々も追試を受けるように。また、履習届を出して受験をしなかった者、出来は悪かったが何とかパスした人で理解を確かめるために受けたい者も可。今回は試験の点数のみで、100 点満点で 60 点以上を合格とするが、今回の期末試験を良く理解しておくように。