「解析概論第１中間試験問題–2005 年７月１日」　井上　淳

● 問題は 3 題、答案用紙は 3 枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、裏を使うことを明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはありません！

＝＝＝＝＝＝

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数列 $\{b_n\}$ に対して下極限の定義を述べよ。
(2) $a_n > 0$ ならば、次の不等式を証明せよ。

$$\underline{\lim}\,\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \underline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\,\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (a) K を $\mathbb{R}$ 内の空でないコンパクト集合で、関数 $g : K \to \mathbb{R}$ が K の各点で上半連続、即ち、

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(x \in \{y \in K \mid |y - a| < \delta\} \Longrightarrow g(x) < g(a) + \epsilon)$$

ならば、g は K で最大値を持つことを示せ。
(b) $K \subset \mathbb{R}$, $L \subset \mathbb{R}$ を共に空でないコンパクト集合とし、$f : K \times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき $g(x) = \min_{y\in L} f(x, y)$ は K の各点で上半連続なることを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下を示せ。

$$(i);\ \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi e n!) = 0, \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

＝＝＝＝＝＝

数学の試験とは、自由な考えで課題に答えて良いものである。勿論、「誰かさんの答を写しておく」等は<u>禁じ手である</u> が、試験監督者はそのような禁じ手を取り締まる為ではなく、正当な範囲の質問に答える為に回ってくるだけである。

認知された定理名[1]を挙げ、正しい使い方[2]をして、望みの結論を導いている答案を期待する。

試験の出来栄については「時の運」であり、自分の理解の状態を調べる一つの方法でしかない、と思って欲しいものである。これから君たちが立ち向かう「創造」の世界は内容が新しければ新しい程、君たち自身の「理解」にのみ依るのだから、「廉価で再現可能な教科」で「分った、これでいける」という感覚を養う手助けになれば幸いである！試験時間は少ないが、この試験問題で「あっ、分かった」を経験することを期待する。もし試験が易しすぎた場合は「あっ、そう」としかならないので、そのような諸君には済まないが差し当たり辛抱して欲しいし、その旨注文をつけて欲しい。

[1]（講義で説明されていなくても）定理の内容を叙述し、必要に応じて証明を与えてあれば「認知された」こととする
[2]定理の仮定が満たされていることを示しているか、がポイント