「解析概論第１中間試験問題解答例–2005 年７月１日」　井上　淳

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 数列 $\{b_n\}$ に対して下極限の定義を述べよ。
(2) $a_n > 0$ ならば、次の不等式を証明せよ。

$$\underline{\lim}\, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

解答例：(1)[3] 数列 b_n に対して $\underline{b}_n = \inf_{k\geq n} b_k$ と定義すると $\{\underline{b}_n\}$ は単調増加数列である。故に、補完実数 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$ 内では極限 $\lim_{n\to\infty} \underline{b}_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underline{b}_n \geq -\infty$ を持つので、それを下極限といい $\liminf_{n\to\infty} b_n$ と書いた。

この定義では分かりにくいし使いにくいので、いくつか別の表現をしよう。まずは簡単のために、**数列が下に有界の場合**を考えよう。

● ある数 $\beta \in \mathbb{R}$ が数列 b_n の下極限とは、

(i) 任意の $\epsilon > 0$ に対しある数 n_0 があって $n \geq n_0$ ならば、$\beta - \epsilon < b_n$、

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対し無限個の番号 $\{n_1, n_2, \cdots\}$ があって $b_{n_k} < \beta + \epsilon$ となる、ことである。

● $\beta = \liminf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{k\geq n} b_k)$ とは

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underline{b}_n \iff \forall\epsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \underline{b}_n \leq \beta \ \&\ \forall' n \in \mathbb{N}, \underline{b}_n > \beta - \epsilon,$$
$$\underline{b}_n = \inf_{k\geq n} b_k \iff \forall\epsilon > 0,\ n < \exists k \in \mathbb{N}, b_k < \underline{b}_n + \epsilon \ \&\ \forall k \geq n, \underline{s}_n \leq b_k$$

のことである。

ここで $\forall' n \in \mathbb{N}$ とは「ほとんどすべての」と読む。$\forall' n \in \mathbb{N}$ とは、有限個を除く、つまりある十分大きい $N \in \mathbb{N}$ に対して N 以下のものを除く全ての自然数ということ。この表現を使うと、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff (\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |a_n - a| \leq \epsilon)$$
$$\iff \forall\epsilon > 0,\ \forall' n \in \mathbb{N},\ a_n \in U_\epsilon(a)$$

これより、

$$\beta = \liminf_{n\in\mathbb{N}} b_n \iff \begin{pmatrix} \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して } \{n \in \mathbb{N} \mid b_n < \beta - \epsilon\} \text{ は高々有限集合であり、} \\ \{n \in \mathbb{N} \mid b_n < \beta + \epsilon\} \text{ は無限集合である.} \end{pmatrix}$$

● （下に有界でないときも含めると）ある数 $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$ が数列 s_n の下極限とは、

(i) $\beta > x$ となる任意の $x \in \bar{\mathbb{R}}$ を定めたとき、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $s_n > x$ となる。

(ii) $\beta < y$ となる任意の $y \in \bar{\mathbb{R}}$ に対し、$y > s_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限に存在する。

(2)[4]$\beta < \underline{\lim}\, \frac{a_n}{a_{n-1}}$ となる任意の β を一つ取ると、ある数 n_0 があって $n \geq n_0$ のとき $\beta a_{n-1} < a_n$ となる。故に $\beta^{n-n_0} a_{n_0} < a_n$ となるから、$\beta\left(\frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}}\right)^{1/n} < \sqrt[n]{a_n}$ が導かれる。これから $\beta = \underline{\lim}\,\beta\left(\frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}}\right)^{1/n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$ となる。β は $\beta < \underline{\lim}\, \frac{a_n}{a_{n-1}}$ となる任意の数だったから、

$$\underline{\lim}\, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}.$$

真ん中の不等式は定義から明らかで、最右辺は上と同様に証明できる。　□

$\boxed{\mathbf{2}}$ (a) K を $\mathbb{R}$ 内の空でないコンパクト集合で、関数 $g: K \to \mathbb{R}$ が K の各点で上半連続、即ち、

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(x \in \{y \in K \mid |y-a| < \delta\} \Longrightarrow g(x) < g(a) + \epsilon)$$

ならば、g は K で最大値を持つことを示せ。
(b) $K \subset \mathbb{R}$, $L \subset \mathbb{R}$ を共に空でないコンパクト集合とし、$f: K \times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき $g(x) = \min_{y \in L} f(x,y)$ は K の各点で上半連続なることを示せ。

解答例：(a)[4] コンパクト集合 K で上半連続ならば g は上に有界で $\sup_{x \in K} g(x) = M < \infty$ となる（実際、もし上に有界でないとすると、数列 $\{x_n\}$ で $g(x_n) > n$ なるものが存在する。K はコンパクトだから部分列 $\{x_{n'}\}$ があって $x_0 \in K$ に収束するとしてよい。任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって、$|x_{n'} - x_0| < \delta$ ならば上半連続性より $n' < g(x_{n'}) < g(x_0) + \epsilon$ となる。$n' \to \infty$ として、$\infty \le g(x_0) < \infty$ となり矛盾)。
sup の定義より、点列 $\{x_n\}$ があって $M - 1/n < g(x_n) \le M$ となる。そこで、部分列 $\{x_{n'}\}$ が x_0 に収束するとすると、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$|x_{n'} - x_0| < \delta$ ならば $M - 1/n' < g(x_{n'}) < g(x_0) + \epsilon \le M + \epsilon$ となる。まず $n' \to \infty$ として $M \le g(x_0) + \epsilon \le M + \epsilon$、$\epsilon > 0$ は任意だったから $g(x_0) = M$ となる。
(b) [3] 点 $x_0 \in K$ で $g(x_0) = \min_{y \in L} f(x_0, y)$ とすると、$f(x_0, y)$ は y に関し L で連続だから最小値をとる点 $y_0 \in L$, $g(x_0) = f(x_0, y_0)$ がある。f はコンパクト集合 $K \times L$ 上で連続だから、一様連続である。故に、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって、$|x - x_0| + |y - y_0| < \delta$ ならば $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$ となる。これより、$|x - x_0| < \delta/2$ ならば $|y - y_0| < \delta/2$ のとき

$$f(x,y) < \epsilon + f(x_0,y_0) = \epsilon + g(x_0) \Longrightarrow \min_{|y-y_0|<\delta/2} f(x,y) < \epsilon + g(x_0)$$

となる。一方 x が何であれ、$g(x) = \min_{y \in L} f(x,y) \le \min_{|y-y_0|<\delta/2} f(x,y)$ だから、

$$|x - x_0| < \delta/2 \text{ ならば } g(x) < \epsilon + g(x_0). \qquad \square$$

注意：不連続な上半連続関数の易しい例は以下のようにして作れる：まず $f \in C([a,b])$ として $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq c \in (a,b), \\ \gamma & \text{if } x = c \text{ with } \gamma > f(c) \end{cases}$$

と定める。この例から、このような不連続点が有限個のときはどうか、もし可算無限個だとどうなるか、色々考えると楽しいのでは。以下の関数は $x = 0$ で上半連続かどうか調べよ。

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \ge 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \le 0, \end{cases} \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ 1/2 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

=========== おまけ ===========

定理 0.1 $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$ を共に空でないコンパクト集合とし、$f: K \times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき

(i) $\max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x,y) \le \min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x,y)$ の両辺が存在し、この不等式が成立する。

(ii) さて、$(a,b) \in K \times L$ が f の鞍点であるとは、*(a)*$f(x,b) \le f(a,b)$ $(\forall x \in K)$ かつ *(b)* $f(a,b) \le f(a,y)$ $(\forall y \in L)$ なることとする。*(i)* において等号が成立する必要十分条件は f が鞍点をもつことであり、更に、*(i)* における等号の値は $f(a,b)$ である。

証明：(i) $\min_{y' \in L} f(x,y') \le f(x,y) \le \max_{x' \in K} f(x',y)$ が $\forall (x,y) \in K \times L$ に対して成立することは明らかであろう。故に、第 1 の不等式で y を一つ固定して $\max_{x \in K} \min_{y' \in L} f(x,y') \le \max_{x \in K} f(x,y)$ が成立し、更に、$\min_{y \in L}(\max_{x \in K} \min_{y' \in L} f(x,y')) = \max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x,y) \le \min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x,y)$.

第 2 の不等式で x を一つ固定して $\min_{y\in L} f(x,y) \le \min_{y\in L}\max_{x'\in K} f(x',y)$, $\max_{x\in K}\min_{y\in L} f(x,y) \le \max_{x\in K}\min_{y\in L}\max_{x'\in K} f(x',y) = \min_{y\in L}\max_{x\in K} f(x,y)$ が成立するので、上と合わせて求める不等式が得られる。

(ii) $(a,b)\in K\times L$ が鞍点だとすると、(a), (b) より $\max_{x\in K} f(x,b) \le f(a,b) \le \min_{y\in L} f(a,y)$ が従う。$\min_{y\in L}\max_{x\in K} f(x,y) \le \max_{x\in K} f(x,b), \min_{y\in L} f(a,y) \le \max_{x\in K}\min_{y\in L} f(x,y)$ だから $\min_{y\in L}\max_{x\in K} f(x,y) \le f(a,b) \le \max_{x\in K}\min_{y\in L} f(x,y)$ となる。故に、(i) の等式が成立し、その値が $f(a,b)$ に等しい。 □

注意：実は「(i) において等号が成立する必要十分条件は f が鞍点をもつこと」が分る。

=========== おまけ終 ===========

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下を示せ。

$$(i);\ \lim_{n\to\infty}\sin(2\pi e n!) = 0, \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

解答例：(i)[3] Taylor の定理より $0<\theta<1$ なる θ があって

$$(*)\ \ e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

となる。故に、ある整数 N があって

$$2\pi e n! = 2\pi N + \frac{2\pi e^\theta}{n+1}$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{2\pi e^\theta}{n+1}\right) = 0.$$

(ii)[4] (*) における θ を θ_n として、これの n 依存性を調べる。

$$\frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta_{n+1}}}{(n+2)!}$$

となるから、$0<\theta_n, \theta_{n+1}<1$ に注意し、$n\to\infty$ として

$$e^{\theta_n} = 1 + \frac{e^{\theta_{n+1}}}{n+2} \to 1 \Longrightarrow \theta_n \to 0.$$

故に、

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{2\pi e^{\theta_n}}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2\pi e^{\theta_n}}{n+1}\right)\left(\frac{2\pi e^{\theta_n}}{n+1}\right)^{-1}\sin\left(\frac{2\pi e^{\theta_n}}{n+1}\right) = 2\pi.$$