

講義の目的

ここにいる多くの学生諸君は、受験準備期間及び大学1年次と、既に2度も数学III、微分積分学の講義を受け、演習で問題を解き、試験を何度も受けてきた。勿論、大学では高校時代にはやらなかったであろう「実数の連続性」とか「 $\epsilon-\delta$ 論法」をやってきたが、偏微分、積分は高校時代にも少しは触れてきた。もう一度同じようなことをやるのはうんざりだ、という気分であろう。似たような内容の講義で、「違いが分る」というのは易しくないし、それを学生諸君に要求することは難しい。

それでも、数学科では「解析概論」を必修とし、これの単位取得を4年次学士論文講究の条件としている。では、「何故それほどまでにこの講義が必要か？」について、数学科教官である我々は学生諸君を十分説得できる論拠があるのだろうか？

ここでは、少なくとも講義内容はこれから数学的思考法を学び、展開していく²上で必要不可欠に近いことを示そうという試みをする。これが「必修」と名のつく所以でなければならないのだから、講義者の責任は重大である。講義者の立場は、「あっ、分かった」という典型例としての「数学的理解」と、その内容を極めて正確に他人に伝えうる言語能力を持つ数学的記述を、講義と演習を通して体験して貰うよう努力することではない。

以下に述べる講義内容、順序は「1年次のそれとの違いを際立たせる」(一般化と抽象化に力点を置く)ということ強く意識して講義するつもりである。この順序が自然だし、効率的で、聴衆にも理解しやすいのではと思うからでもある(但し、解析概論Iにおいても積分概念等、既習の事柄は必要ならば復習しつつ用いる)。しかし「違いを際立たせる」ためにと、講義スピードが早かったり、内容が幾分難しく感じることもあろうから、その時は、講義中でもメールでも直ちに注文を出して欲しい。しかし、全く理解できていないからといって、1年次のそれをこの講義でそのまま繰り返すというようなことはしないつもりである。受講者各人がそれなりの自覚³をもって講義に参加しなければ、そもそも大学教育のような「組織的教育」は成立しないのだから。但し、分らないことは少しは考えてからが望ましいが、とにかく質問して欲しい。それに対しては講義中であろうと或いはメールでも適宜応答する予定である。

Cauchy さえ惑わされた、厳密性を欠く計算 :

$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ax^2) \\ \cos(ax^2) \end{array} \right\} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[\cos\left(\frac{b^2}{4a}\right) \mp \sin\left(\frac{b^2}{4a}\right) \right] \quad (1)$$

なる計算結果を出した Cauchy⁴は、事の序でに勢い良く次の結果を出した！

$$\int_0^{\infty} x \left\{ \begin{array}{l} \sin(ax^2) \\ \cos(ax^2) \end{array} \right\} \sin(bx) dx = \frac{b}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[\sin\left(\frac{b^2}{4a}\right) \pm \cos\left(\frac{b^2}{4a}\right) \right]. \quad (2)$$

¹以下では、講義中には述べられなかったことも書いてある。問題なのは「何故数学的思考法や技術が必要なのか」を諸君がどう納得するか、それにこの講義がどこまで応えられるか？である。

²研究関係就職希望者を主たるターゲットとして講義をするのは片手落ちであろう。私に分る範囲で、実生活に数学的思考法とやらがどう役にたつか、折に触れ述べてみるつもりである

³昔は「やる気」といったが、何等かの意味の「問題意識」であり「動機」のこと。不純な動機でも、数学を勉強する動機になるなら結構。「黒いネコも白いネコもネズミをとるネコはみんなよいネコ」というのが登小平 “Deng Xiao Ping” 黒猫白猫論

⁴the “Father of rigour”

(1) は正しい値だが、(2) は間違いで、左辺の広義積分は収束しないことが E. Talvila によって 2001 年になって確かめられた。即ち、これは、一般には

$$\int f(x, s)dx = a(s) \stackrel{?}{\implies} \int \frac{d}{ds} f(x, s)dx = \frac{d}{ds} a(s)$$

が、成立しない例になっている⁵。E. Talvila によれば、「定積分の計算表」には驚くべき程の確率で間違いが見い出されるというし、Mathematica や Maple でこれらを計算させるとそれぞれ異なる結果がでるといふ。計算機も当てにならないとなると、ここ当分は数学者としての職場が確保されたことになるのかもしれない。

(2) の間違いについては、まず何故この計算(1) が出てきたかを知る必要があるが、まだ調べていない。ところで、間違った計算式や数表を用いた「耐震性の計算」でもして、建造物が予想より簡単に壊れた、等という報告があると、一体誰が罰せられるべきだろうか？

数学とは

学生諸君それぞれに数学に対する思い入れがあるかと思われるが、極めて一般的には以下のように考えられるだろう。

[数学とは⁶]: ありとあらゆるパターンを分類することであり、それらを研究する学問である。ここで「パターン」とは、精神が認め得るほとんどあらゆる種類の法則性を持った事象である。知的生活と言われるものは、世界に法則性があるからこそ可能である。また、精神が認め得る法則性とは、変転していく世界の中で相対的に変化が少ないと認識されるものでしかなく、それ故、法則性ありと認識される事柄も時代と共に変化していく⁷。

様々な環境の中で、同一のパターンが生じて来るという考え方は単純な考え方である。何にしろ、以前には全く異なっているとみなされた複数のものが、数学的には同一であると認識し得ることは数学者にとって最大の楽しみの一つである。Poincaré(1854-1912) は「数学は異なる事物に同じ名前を与える技術である」とさえ言っている。

更に、私の表現では

物理学は「実験を手がかりに」⁸自然界の法則性を研究するものであるが、「自然界にあるとされる法則性」に関する認識は時代と共に急激に変化することがある。例えば、天動説から地動説へ、波動説から粒子説へ、等色々考えられる。

(a) 更に、興味深い話を佐藤文隆・松田卓也「相対論的宇宙論」から引用しよう：1908 年 6 月 30 日に数メガトンの核爆発に値する被害を周囲に与えた天上からの落下物があった。当然これは隕石落下と考えられ、ツングース隕石と呼ばれていた。ところが不思議なことに、落下地点とおぼしき場所に隕石が残っていない。そこである研究者が、この落下物は隕石ではなく、ブラックホールであろうという新説を出した…。ではブラックホールとは何だろう。それは重力源としての質量はあるのに、大きさが無限小のものである。…ここで登場しているのは地球の 1000 万分の 1 ぐらいの重さのものである。これは小さいので地面に落下してもスルスルと地球を貫通⁹し、北大西洋上

⁵こうなると、「積分と微分の順序を交換できる必要十分条件」は存在するのだろうか？という問題意識が出てくるだろう。Riemann 積分でも、これから学ぶ Lebesgue 積分でも十分条件のみしか記述されていない。ではどうすれば？

⁶Sawyer 「数学へのプレリュード」みすず書房、からの引用

⁷数学では期待される法則性は証明されるまでは予想といわれる。「状況を設定し、それを明解な仮定の形で述べ、誤りない推論を積み重ねて結論を導くこと」を証明という

⁸この「…」は細谷氏による朝永振一郎氏が好んだ表現として教示された。細谷氏は「実験に基づいて」ではない！と強調されていたが、これは実験に基づくと称するデータの捏造に対する強力な抑止力となり得る！

⁹「大きさが無限小」とか「スルスルと地球を貫通」とか、文学的な質的表現に見えるが、これらを「定量的」に厳密に表現するには？これは啓蒙書だからこのような記述になるのは仕方ないにしても、物理学者の「無限小」をどう厳密化したらよいのだろうか

のある地点に出て再び空に飛んでいってしまったので落下物が残っていない…。

(b) 月の起源について最近「地球と火星の間にあったオルフェウスという惑星と地球が極めて都合良く衝突したのが45.5億年前」とかというのが有力になりつつあるという¹⁰。また、「ビッグバン」とか「磁極の反転」とか、「講師見えてきたように嘘を言い」なのか素人には判断できないが、極めて興奮させる。少なくとも「磁極の反転」を電磁流体方程式を解いて¹¹定量的に予言できないものだろうか？

(c) 最近の Perelman の結果は少なくとも私の気持ちを高揚させる。彼の考え方を Einstein 方程式に適用して上に述べた「ビッグバン」の存在をより数学的に正確に言えないのか？或いは、これを Navier-Stokes 方程式に適用して乱流を説明できないか？また、月の存在を地球と火星の間？に存在したとかいう「オルフェウス」に帰する考え方を、重力場の方程式からの帰結として理論化できないのか？丁度、波の水しぶきを流体表面波の方程式から導くことに相当するのかも？

物理における、自然界の事象に関する認識の急激な変化と比して、数学における理論の不変性、普遍性は際だっている¹²ではあるまいか。

但し、これは学問の性質上当然の事であって、物理と数学の優劣を言っている訳ではない。とはいえ、もし宇宙論でビッグバン近辺での事柄を理解しようとしたら、まずは宇宙論の数学的表現形態である重力場の方程式の解の性質を調べなければならない。今までは物理的現象を説明する物理的理論を物理的考察を加えて構築し、それからその現象を定量的に説明するために微分方程式を作る。その方程式の解を何等かの方法で計算して、それが現象を説明し、更に予測し、その予測が実際に観測されたら、その理論も、その方程式も正しいとしてきた¹³。このとき、重力場にしても、新たな素粒子にしても、今までと違うのは、そう簡単に「実験」出来ない以上、より数学的に解の性質を考察せざるを得ないことであろう。

結果として物理の論文に、より頻りに数学技術が「数学上の仮定を確かめもせず」使われるようになった¹⁴。

これより、物理学者の計算は数学的に正当化することが難しいことが多いことが了解されるであろうし、一方で、物理学は新しい数学理論の開発を要請しているとも考えられるが、数学者はその期待に答えられるであろうか？¹⁵。

¹⁰ケーブル TV の中に Discovery Channel なるものがあり、そこで「もし月がなかったら」という番組を放映

¹¹力武モデルというのがあったはずだが、どうなったのかなー

¹²ピタゴラスの定理は平面上では今でも正しい！

¹³例えば、Dirac 方程式の解の研究から、「電子の海」という考え、そして反電子という解釈ができたのでは？ところで、Weyl 方程式という数奇な運命を辿りつつあるものの名を聞いたことがあるだろうか？質量無し $E^2 = |p|^2$ の場合に Weyl が提案した方程式で、パリティを保存しないので無意味とされたが、1956 年の Lee-Yang の実験でパリティ非保存の現象が認識されたため復活し、ニュートリノの方程式とされてきた。ところが、カミオカンデの実験で“ある”ニュートリノは質量を持つとかで、Weyl 方程式の運命は如何に？

¹⁴例えば、一介の大学院生であった Feynman が経路積分を提唱したとき、むしろ物理学者の方がそれに対して冷淡であって、数学の大学教授であった Kac が注目しその考え方の一部を数学にしたものが Feynman-Kac formula である。ところで、Feynman は彼の経路積分で Schrödinger 方程式の解の Planck 定数 \hbar -依存性を明らかにし、Bohr の対応原理が見事に説明できることを示した（これが彼の学位論文）。ところが、その「数学的らしき過程に2つの問題点がある」。一つは、現在もっとも普遍的に使われている Lebesgue 測度の概念が経路積分にはそのままでは適用できない。故に「積分」といっても、「その表示されたものが一体何物か」を数学的に定義できないのである。それにもかかわらず、その積分表示で \hbar をゼロに持っていく操作を、既存の有限次元空間での積分論における停留位相の方法 (stationary phase method) を用いて形式的に行なうと、確かに Bohr の対応原理が導出される。しかし、積分が数学的に正当化できない以上、結果を無条件で正しいとは出来ないのが数学者の判断である。一方物理学界はいまや経路積分を無条件に正しいとし、停留位相の方法とか鞍点の方法とかを自在に使い結論を導いている。それらの方法で得られる主要項 (?) は、少なくとも原理的には極めて代数的、幾何的に形式的な計算で得られるのである。数学では、それらの「方法」で結果が正しいためには、誤差を評価しなければならず、それが極めてしんどいのである。ところで、この解釈は筆者の独断と偏見に基づいているのですから、諸君は眉に唾をつつつは是非々で聞かねばいけませんぞ！

¹⁵Einstein が一般相対性理論を考えていたとき、既に Riemann 幾何学はあってまさに応用されんとしていた！Schrödinger が彼の方程式を記述するとき、もし偏微分という概念が未発達だったら大変だったろう。昔に遡れば、実数が認識できなかった Pythagoras 時代 $\sqrt{2}$ は悪魔の数であった。数学はこの「悪魔の数」を概念の整理、拡張で解消したし、それによって微積分も基礎付けられた。Gauss の導入した複素数も容易には認められなかった。もっとも Einstein は「神はダイスを振らず？」とか言って量子力学の Copenhagen 解釈を拒んだ。この最後の部分は「Einstein は操作主義的に(量子力学を)受け入れること拒否し、ボーアとの論争を通じて量子力学を鍛え上げるのに貢献した」と言うべきだと言う細谷氏の意見があった

解析的な考え方とは

この講義では、数学の中にある「解析的な考え方」について色々述べて、諸君の数学、特に解析学に対する興味、好奇心を呼び起こしたい。代数学や幾何学と異なり、解析的手法は極めて泥臭い。それは、「極限」という見えないものを何とか捕まえよう、或いは認識しようとする努力であって、「見えた」としても、「存在する」としか言えないことが多いからである¹⁶。例えば、天体力学の3体問題はそれを微分方程式で表現してその解として「認識」されるが、一般には「3体問題の解は初等関数¹⁷では表示できない」事が知られている。それにもかかわらず「存在している」といえるための補助手段が、「評価」¹⁸である。その存在を確認された量についても、この部分が主要なものであって、それ以外の影響は小さいと言うために、その「余りの項」を評価しなければならないのだ¹⁹。

=====

『評価』の一例として03年度I類M組の期末試験の問題を再掲しておく：

[4] (i) $(e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n H_n(x)e^{-x^2}$ と $H_n(x)$ を定義すると、 H_n は n 次多項式であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n). \end{cases}$$

なることを示せ。

(ii) f が $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) 上の連続関数のとき、関数 $g(x) = \int_a^b f(y) \exp(-(x-y)^2) dy$ を $x=0$ で Taylor 展開せよ。

ヒント：『 A を \mathbb{R}^n 上の体積確定の有界閉集合、 I を任意の1次元区間とし、 $K = A \times I$ とおく。 $f(x, t)$ を K 上の連続関数とすると、以下が成立する；

(1) $F(t) = \int_A f(x, t) dx$ は I 上連続である。

(2) 更に $\partial f / \partial t$ が K 上連続ならば²⁰、 F は I 上 C^1 -級で $F'(t) = \int_A \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$ が成立つ。』

=====

この問題の主眼は(ii)のTaylor展開でここで剰余項の評価が必要になる！(i)はそのためのヒントであるから、別の道筋で(ii)が証明できればそれで良い。

注意：この問題の主旨は、『熱方程式の解は初期値が積分可能関数ならば、少しでも時間が経てば実解析関数になる』ことを示すことであった。

解答例が2003度の1年次講義のホームページに載せてあるが、ここに再掲しておこう：

(i) $H_1(x) = 2x$ なることと、 $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ より H_n は n 次多項式なることは易しい。また部

¹⁶魚が「存在する」という魚探の反応と、「釣れた」という快感には大きなギャップがある。刺身がうまい、いや天婦羅がというのは、更に別の問題となる

¹⁷ところで初等関数とは何か？

¹⁸物理学者の多くの論文では、ほとんどこの評価がない?!その昔天文学者が小惑星等の位置を計算で推測し実際発見があった。それを見てPoincaréは彼等の計算は意味があるはずだと推測し漸近級数解なる概念を発見した。しかしその場合、考えるべき方程式とその解の存在は保証されていたからこそ、近づいていくことが証明されたのでは? 数学的には解が必ずしも存在しない微分方程式がある!

¹⁹数学者の議論を日常生活に適用すると、事象を場合分けるとき、つい用心して「その他」の項目も加えておかないと気が休まらない。もし「その他」がないと思いがけないことに対応できないし、不必要だと分かったときにそれを空集合と見なせば良いのだからと! 定量的な考察無しで、これは小さいはず、と断言できる物理学者はすごい感覚?!昔、連続だが至る所で微分不可能な関数は病的なものと考えられてきたが、今やそのような病的な関数の方が generic ということに相成った。癌細胞はむしろ誰にでも存在しているという考え方にも似ているなあー。また、微分方程式の解を未定係数法で求めようとするところがある。しかしその求められた級数の収束半径が0ということもあることに、気をつけよう

²⁰先程言及した「積分と微分の順序交換可能」な十分条件の一つ

分積分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^m (-1)^n (e^{-x^2})^{(n)} dx = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n). \end{cases}$$

(ii) $f(y)(-2(x-y)\exp(-(x-y)^2))$ は y に関して積分可能だから微分と積分の交換ができて

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(y) \exp(-(x-y)^2) dy = \int_a^b f(y) \frac{\partial}{\partial x} \exp(-(x-y)^2) dy$$

となる (問題に記したヒントを用いている)。更に、極限と積分の交換ができて

$$g'(0) = \int_a^b f(y) 2y e^{-y^2} dy.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \exp(-(x-y)^2) \Big|_{x=0} = (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \exp(-y^2)$$

同様に $f(y) h_n(x-y) \exp(-(x-y)^2)$ は y に関して積分可能で

$$g^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b f(y) \exp(-(x-y)^2) dy = \int_a^b f(y) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp(-(x-y)^2) dy$$

となる。これより g は C^∞ -関数なることが分る。更に、極限と積分の交換ができて

$$g^{(n)}(0) = \int_a^b f(y) (-1)^n H_n(y) e^{-y^2} dy.$$

故に

$$R_{N+1}(x) = g(x) - \sum_{n=0}^N \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b f(y) H_{N+1}(\theta x - y) e^{-(\theta x - y)^2} dy,$$

とおくとき、任意の x に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{N+1}(x)| = 0$$

を言えば良い。

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(y) H_{N+1}(\theta x - y) e^{-(\theta x - y)^2} dy \right| \\ & \leq (\sup |f|) \int_{-\infty}^{\infty} |H_{N+1}(\theta x - y)| e^{-(\theta x - y)^2} dy \quad \text{に変数変換 } y - \theta x \rightarrow y \\ & = (\sup |f|) \int_{-\infty}^{\infty} |H_{N+1}(y)| e^{-y^2} dy \quad \text{に Schwarz の不等式} \\ & \leq (\sup |f|) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{N+1}^2(y) e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \leq (\sup |f|) \sqrt{\pi} (2^{N+1} (N+1)!)^{1/2} \end{aligned}$$

及び、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n/n! = 0 (a > 0)$ より

$$|R_{N+1}(x)| \leq (\sup |f|) \sqrt{\pi} \frac{1}{(N+1)!} (2^{N+1} (N+1)!)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

=====

問：「数学は異なる事物に同じ名前を与える技術である」の一種として、既存の概念の拡張がある。1変数の Taylor の定理を多変数に拡張せよ。また、1変数連続関数に関する中間値の定理の多変数版はどうなるのだろうか？

問：微分商は dx/dt と考えるべきで dx と dt をバラバラにして考えて良いのか？(ここには、微分幾何学的な考え方が現れる)

ところで、多くの諸君は合成関数の微分則 $(f(\phi(t)))' = f'(\phi(t))\phi'(t)$ より、変数変換を用いて、不定積分の変数変換公式

$$\int g(\phi(t))\phi'(t)dt = \int g(x)dx \quad (g(x) = f'(x) \text{ と書いた})$$

が得られることは知っていよう。

しかし、例えば積分記号下での変数変換として、次のような操作にお目にかかったらう：

$$x = \phi(t), \quad \frac{dx}{dt} = \phi'(t) \quad \text{だから} \quad dx = \phi'(t)dt$$

として、

$$\int g(x)dx = \int g(\phi(t))[\phi'(t)dt]$$

となる。この議論に違和感はなかったらうか？何しろ、微分商は dx/dt と考えるべきで dx と dt をバラバラにして考えて良いとは習わなかったはずなのだから！この疑問にも答えたい。

問：微分積分学の基本定理は1次元の場合だったが、多次元にはどう拡張したら自然なのだろうか？

一見何気ないこのような質問の中に、大問題の種があることがある！ところが、多くの数学者は目前の技術的問題に追われて見過ごしてしまうし、場合によっては「大問題の種」を提唱した者を無視しようとする。

一応想定している知識²¹

- (i) 「実数の連続性」「数列の収束、発散」「冪級数の収束半径」
- (ii) 「微分係数」「偏微分係数」「全微分可能性」「合成関数の微分」「Taylor の定理」「Taylor 展開」
- (iii) 「積分」「広義積分」「部分積分」「重積分」「変数変換公式」

まずは、今迄の知識で出来そうな問題でなかなかできないかもしれない問題を演習でやって貰う。

=====

問題 0： n を 2 より大きな偶数とし、曲線 $C_1 : y = x^n$ と $C_2 : y = n^x$ を定める。

- (1) C_1 と C_2 の $x < 0$ における交点 P_n は唯一つである。
- (2) C_1 と C_2 の $x > 0$ における交点の個数は幾つか？
- (3) P_n の $n \rightarrow \infty$ での極限はどうなるか？

問題 1：以下の主張を証明せよ。

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \ell.$
- (b) $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \ell.$
- (c) $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$

問題 2： $[a, b]$ 上で連続な関数 f が、関数等式 $2f((x+y)/2) = f(x) + f(y)$ を満たすとき、 f は x の 1 次式なることを示せ。(ヒント：もし $f(b) = f(a)$ ならば $g(x) = f(x) - f(a)$ とおくと、 $g(a) = g(b) = 0$ であり $g((a+b)/2) = 0$ となる。繰り返すと...)

問題 3： $|c| < 1$ ならば、任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} e^{nz}$ は絶対収束する。

=====

²¹ 講義中に良く理解できない事柄に遭遇したときが、分れ道である。既に習っている気がする事柄でも他人の事は気にせずに、ともかく身ぶりでも納得していないことを示して欲しい。それが積極的に参加していることになるのだから

正項級数の収束判定法

定理 0.1 (比較判定法) $a_n, b_n > 0$ とし、ある定数 $K > 0$ があって $a_n \leq Kb_n$ が十分大きな n に対して成立するとする。このとき、 $\sum b_n$ が収束するならば、 $\sum a_n$ も収束する。対偶をとれば、 $\sum a_n$ が発散するならば $\sum b_n$ も発散する。

特に $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = \rho$ が存在して、 $0 < \rho < \infty$ のとき $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束、発散する。

系 0.1 (Cauchy の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r \text{ が存在するとする} \implies \begin{cases} \text{もし } 0 \leq r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

系 0.2 (d'Alembert の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ が存在するとする} \implies \begin{cases} \text{もし } 0 \leq r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

問題意識：上の Cauchy や d'Alembert の判定法の条件「...が存在すれば」という条件は、「...が存在しなければ」という可能性を排除していないので、煩わしい。何とかできないのか？

=====

解析概論 I 講義予定内容

I. 距離空間とその位相：

実数の性質：(i) 四則演算、(ii) 大小関係、(iii) 実数の連続性（復習）

どういう経緯で、Napier 数は考えだされたのか？インターネットで調べてみよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

極限：「上極限、下極限」の定義とその性質、演算、級数の判定条件の少々的一般化

「上極限、下極限」集合の定義をついでに

距離の公理と距離空間の例

完備でない距離空間の例、一体完備でないと何が困るのか？完備化について

\mathbb{Q} は距離 $d(x, y) = |x - y|$ で完備でない距離空間をなす。これを完備化したものが実数である

$C[a, b]$ は距離 $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ で完備でない距離空間をなす。これを完備化した空間の元はどのようなもので、それに対する積分はどう定義されるのか？

縮小写像定理

コンパクト性

Bolzano-Weierstrass の補題とは、何を意味するのか？

\mathbb{R}^n で $n \rightarrow \infty$ なる空間の「極限」を考えてみると、無限次元では Bolzano-Weierstrass が成立しない

Ascoli-Arzela の定理

II. 微分 :

関数、連続関数、

微分商、左(右)微分係数、

Gateaux 微分、Fréchet 微分、

Taylor の定理とその剰余項の積分表示、Taylor 展開

III. 微分方程式 :

Picard の逐次近似法 : 常微分方程式の解の存在定理 I、初期値への連続依存性

Cauchy の折れ線近似 : 常微分方程式の解の存在定理 II

(話し) Feynman 経路積分は『一般の無限次元空間には Lebesgue 的な測度は存在しない!』により現時点では数学的には正当化ができない。しかし?!

IV. 陰関数定理とその応用 :

逆関数定理、Lagrange 未定乗数法、

1 の分解、多様体の定義、Sard の定理

微分と微分形式

解析概論 II 講義予定内容

I. 積分論 :

一般化 Riemann-Stieltjes 積分、有界変動関数、

微分積分学の基本定理の拡張、

収束定理(極限操作と積分の可換性)についての考察と積分論、

パラメタ付き(広義積分)のパラメタ依存性:鞍点法(Stirling の公式を例にとって)と停留位相法による積分の漸近挙動について

II. ベクトル解析 :

線積分、面積分、

Stokes の定理、Gauss の発散定理、Green の公式

=====

参考文献

- [1] M.S. Berger: Nonlinearity and Functional Analysis—Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1977,
- [2] R. Courant & H. Robbins: What is mathematics?, 「数学とは何か」(森口繁一監訳) 岩波書店、東京、1966,

- [3] 深谷賢治:「電磁場とベクトル解析」岩波講座 現代数学への入門 17、1995、
- [4] _____:「解析力学と微分形式」岩波講座 現代数学への入門 18、1996、
- [5] E.Hewitt- K.Stromberg: Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965、
- [6] 金子晃:「数理系のための 基礎と応用 微分積分 I, II- 理論を中心に」サイエンス社、東京、2001、
- [7] 小林昭七:「曲線と曲面の微分幾何」裳華房、東京、1977、
- [8] 小松勇作:「解析概論 [I]」広川書店、東京、1962、
- [9] 松島与三:「多様体入門」裳華房、東京、1965、
- [10] H.K. Nickerson, D.C. Spencer and N.E. Steenrod:Advanced Calculus, Van Nostrand, Princeton, 1959、
- [11] 野崎昭弘編:「現代数学の風景」(野村泰敏「ベクトル解析」野崎昭弘「言語と数学」)サイエンス社、東京、1993、
- [12] W. Sawyer: Prelude to Mathematics,「数学へのプレリュード」(宮本敏雄・田中勇共訳)みすず書房、東京、1978、
- [13] J.T. Schwartz: Non-linear Functional Analysis, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1969、
- [14] 杉浦光夫:「解析入門 I, II」東京大学出版会、東京、1980/85、
- [15] 杉浦光夫等:「解析演習」東京大学出版会、東京、1989、
- [16] 高木貞治:「解析概論」(軽装版)岩波書店、東京、1983、
- [17] 高橋陽一郎:「微分方程式入門」東京大学出版会、東京、1988、
- [18] 竹之内脩:「トポロジー」広川書店、東京、1962、
- [19] E. Talvila: *Limits and Henstock integrals of products*, Real Analysis Exchange, 25(1999/2000), pp. 907-918.
- [20] _____: *Necessary and sufficient conditions for differentiating under the integral sign*, Amer.Math.Monthly 108(2001), pp.541-548,
- [21] E.T. Whittaker and G.N. Watson: A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, London, 1965(reprinted),
- =====
- [22] R. Feynman: Surely, you're joking, Mr. Feynman, I, II,「ご冗談でしょ、ファインマンさん上下」(大貫昌子訳)岩波現代文庫、東京、2000/01、
- [23] _____: QED-The strange theory of light and matter quantum electrodynamics,「光と物質のふしぎな理論 - 私の量子電磁力学」(釜江常好、大貫昌子訳)岩波書店、東京、1987、
- [24] ロゲルギスト:「物理の散歩道」岩波書店、東京、1963、
- [25] 佐藤文隆・松田卓也:「相対論的宇宙論 - ブラックホール・宇宙・超宇宙」ブルーバックス、講談社、東京、1974、
- [26] 朝永振一郎編:「物理学読本」みすず書房、東京、1969、
- [27] 朝永振一郎:「スピンはめぐる-成熟期の量子力学」中央公論社、東京、1974、