解析概論 I　第 9 回講義内容（2005 年 7 月 8 日）井上淳

1　実数とその性質

2　距離空間とその位相

3　コンパクト集合

4　連結性

5　微分、Taylor の定理

6　常微分方程式の解の存在定理

6.1　Picard の逐次近似法

前回講義で概略だけを述べた微分方程式の解法、Peano の逐次近似法と Cauchy の折れ線法を説明する：

以下の常微分方程式の初期値問題を考えよう：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \\ x(\underline{t}) = \underline{x}. \end{cases} \tag{1}$$

この方程式を満たす適当な関数 $x(t)$ があるとして、方程式を時間に関して $[0, t]$ 上で積分する。もし微積分の基本定理を用いることができるならば、

$$\int_{\underline{t}}^{t} \frac{d}{ds}x(s)\,ds = x(t) - x(\underline{t}) = \int_{\underline{t}}^{t} f(s, x(s))ds$$

となるから

$$x(t) = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{2}$$

が従う。逆に、$x(t)$ が(2) を満たし更に $f(s, x(s))$ が $[\underline{t}, t]$ 上連続ならばここでも微積分の基本定理を用いて(1) が従う。

これより、$x(s)$ が $[\underline{t}, t]$ 上連続で $f(t, x)$ が (t, x) に関して連続等の条件を満たせば、上の推論が成立し、(2) を解くことが方程式(1) の解を構成することになる。以下、この方針で(1) の解を『少なくとも初期時刻の近くでは』構成できることを示す。まず、次の補題を用意する。

補題 6.1 (Gronwall) $a(t),\ f(t),\ \phi(t)$ は区間 $I = [t_0, t_1]$ で定義された連続関数で、$f(t) \geq 0$ とする。I 上で積分不等式

$$\phi(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(s)ds \quad (t \in I)$$

を満たすとき、

$$a(t) \equiv a \text{ ならば}$$

$$\Longrightarrow \phi(t) \le a \exp\left[\int_{t_0}^t f(s)ds\right] \quad (\textit{Gronwall's 1st inequality})$$

$$a(t) = a_0 + a_1(t - t_0),\ f(t) \equiv f \neq 0 \text{ ならば}$$

$$\Longrightarrow \phi(t) \le a_0 e^{f(t-t_0)} + \frac{a_1}{f}\big(e^{f(t-t_0)} - 1\big) \quad (\textit{Gronwall's 2nd inequality}).$$

証明：$\Phi(t) = \int_{t_0}^t f(s)\phi(s)ds$ とおくと $f(t) \ge 0$ だから

$$\frac{d}{dt}\Phi(x) = f(t)\phi(t) \le f(t)a(t) + f(t)\Phi(t), \quad \frac{d}{dx}\Phi(t) - f(t)\Phi(t) \le f(t)a(t)$$

が成立つ。$F(t) = \exp\big[-\int_{t_0}^t f(s)ds\big]$ とおくと微分不等式

$$\frac{d}{dt}(F(t)\Phi(t) = F(t)\left(\frac{d}{dt}\Phi(t) - f(t)\Phi(t)\right) \le F(t)f(t)a(t)$$

が得られ、t に関して積分して

$$\Phi(t) \le \frac{1}{F(t)}\int_{t_0}^t F(s)f(s)a(s)ds.$$

これを、与えられた積分不等式に代入して

$$\phi(t) \le a(t) + \Phi(t) \le a(t) + \frac{1}{F(t)}\int_{t_0}^t F(s)f(s)a(s)dt.$$

あとは、特別な場合について計算すれば良い。 □

問題：Gronwall の不等式の仮定で、もし現れる関数の連続性が保証されないが、積分が何等かの形で意味付けられるときも、不等式自身は成立しないのだろうか？

定義 6.1 (Lipschitz 連続) D を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の集合とし、関数 $f(t,x)$ が $f : D \to \mathbb{R}$ とする。定数 L があって、任意の $(t,x),(s,y) \in D$ に対し $\|f(t,x) - f(s,y)\| \le L(|t-s| + \|x-y\|)$ となるとき、f は D で *Lipschitz* 条件を満たす、或いは f は *Lipschitz* 連続という。L を *Lipschitz* 定数という。

定理 6.1 (Picard の逐次近似法) $D = [\underline{t} - T, \underline{t} + T] \times \overline{B(\underline{x}; r)}$ $B(\underline{x}; r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - \underline{x}\| < r\}$ とし、$f(t,x) : D \to \mathbb{R}^m$ を D 上での *Lipschitz* 連続関数で *Lipschitz* 定数を L とする。

$$M = \max_{(t,x)\in D}\|f(t,x)\|, \quad \delta = \min\big(T, \frac{r}{M}\big),$$

とするとき、

$$x_n(t) = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^t f(s, x_{n-1}(s))ds \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad x_0(t) = \underline{x} \tag{3}$$

と $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ を決めることができ、$|t| \le \delta$ で一様に

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) \tag{4}$$

が存在する。この関数は(1) の一意的な解を与える。

証明概略：[I] （関数列の well-definedness）$x_0(t) = \underline{x}$ より $|s-\underline{t}| \le |t-\underline{t}| \le \delta$ のとき $(s, \underline{x}) \in D$ であるから(3) の右辺の積分、即ち $x_1(t)$ が定義できる。$x_2(t)$ が定義できるためには、$|s-\underline{t}| \le |t-\underline{t}| \le \delta$ のとき $(s, x_2(s)) \in D$ でなければならない。これを示し、任意の n に対し $|s-\underline{t}| \le |t-\underline{t}| \le \delta$ のとき $(s, x_n(s)) \in D$ となることを示せば、$x_n(t)$ が D で well-defined であるという。

[II] （極限の存在と微分方程式を満たすこと）$|t-\underline{t}| \le \delta$ で一様に極限(4) があれば(3) において $n \to \infty$ として(2) が満足される。極限が連続関数だから、合成関数 $f(s, x(s))$ も連続であり、微分積分の基本定理から、(2) を t に関して微分して(1) が求まる。

[III] （一意性）連続関数で(2) を満たすものがあるとすると、

$$x(t) - y(t) = \int_{\underline{t}}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds$$

となる。$\phi(t) = \|x(t) - y(t)\|$ とおくと、f が Lipschitz 定数 L の関数だから

$$\phi(t) \le L \int_{\underline{t}}^{t} \phi(s) ds \quad \phi(\underline{t}) = 0$$

となる。これより $\phi(t) = 0$ を示す。　　□

注意 1：上の証明の概略で、[I] では Lipschitz 連続性は用いていないが、[II] 及び [III] では Lipschitz 連続なることを用いている！

注意 2：(i) 「well-definedness」とは見掛け上ではなく「定義がちゃんとできる」という意味である。(ii) 「$|t-\underline{t}| \le \delta$ で一様に極限(4) があれば(3) において $n \to \infty$ として(2) が満足される」というが、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\underline{t}}^{t} f(s, x_n(s)) ds = \int_{\underline{t}}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s)) ds = \int_{\underline{t}}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} x_n(s)) ds$$

の証明がポイントである。ここに用いたのは、Riemann 積分は一様収束していれば積分と収束が交換可能ということである。

==================詳しい証明====================

一意性の別証明　：$x(t)$, $y(t)$ を $\{t \mid |t-\underline{t}| \le \delta\}$ における(2) の二つの解とする。

$$x(t) = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} ds\, f(s, x(s)), \quad y(t) = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} ds\, f(s, y(s))$$

だから、$z(t) = x(t) - y(t)$ とおくと

$$z(t) = \int_{\underline{t}}^{t} ds\, (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))$$

となる。ここで上式のノルムを f の Lipschitz 性を用いて計算すると

$$\|z(t)\| \le \int_{\underline{t}}^{t} ds\, \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \le L \int_{\underline{t}}^{t} ds\, \|z(s)\| \qquad (5)$$

となる。故に

$$C = \max_{s \in \{|t-\underline{t}| \le \delta\}} \|z(s)\|$$

とおくと、

$$\|z(t)\| \le CL|t-\underline{t}|$$

となる。この評価を再度(5) に代入し、

$$\|z(t)\| \leq \frac{1}{2}CL^2|t-\underline{t}|^2$$

となるから、帰納的に、任意の p に対し

$$\|z(t)\| \leq \frac{1}{p!}CL^p|t-\underline{t}|^p$$

となる。ここで、$p \to \infty$ として $\|z(t)\| = 0$、即ち $z(t) = 0$ が従う。

存在証明 ：

(i) (3) で書いた $x_k(t)$ は本当に定義できているのか？即ち、$(s, x_{k-1}(s)) \in D$ なのか？そこで、任意の $k \geq 1$ に対し、$|t-\underline{t}| \leq \delta$ ならば

$$\|x_{k-1}(t) - \underline{x}\| \leq r \tag{6}$$

となることを示す。

実際、$k=1$ のときは成立することは明らか。$|t-\underline{t}| \leq \delta$ のとき、$k-1$ で $(t, x_{k-1}(t)) \in D$ が成立するとすると、

$$\|x_k(t) - \underline{x}\| \leq \int_{\underline{t}}^{t} ds\, \|f(s, x_{k-1}(s))\| \leq M|t-\underline{t}| \leq r \tag{7}$$

となり、任意の $k \geq 1$ に対し(6)、即ち $(t, x_k(t)) \in D$ が成立することが分かる。

(ii) $\{x_k(t)\}$ が $\{|t-\underline{t}| \leq \delta\}$ で Cauchy 列をなす。

まず

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \int_{\underline{t}}^{t} ds\, \big(f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))\big)$$

より

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{ML^{k-1}|t-\underline{t}|^k}{k!} \tag{8}$$

が成立することを示す。$k=1$ として上式が成立することは直ちに分かる．k で成立するとして

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \left| \int_{\underline{t}}^{t} ds\, \frac{ML^k|s-\underline{t}|^k}{k!} \right| = \frac{ML^k|t-\underline{t}|^{k+1}}{(k+1)!}$$

となるから，$k+1$ でも成立。故に $\{x_k(t)\}$ は Cauchy 列をなす。実際、

$$x_k(t) = \underline{x} + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \cdots + (x_k(t) - x_{k-1}(t))$$

に注意すれば、$k < \ell$ として

$$x_\ell(t) - x_k(t) = \sum_{j=k+1}^{\ell} (x_j(t) - x_{j-1}(t))$$

となる。だから

$$\|x_\ell(t) - x_k(t)\| \leq \sum_{j=k+1}^{\ell} \|x_j(t) - x_{j-1}(t)\| \leq \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{ML^j\rho_1^{j+1}}{(j+1)!}.$$

故に上式右辺は $k \to \infty$ のとき 0 に収束する。

(iii) その極限を $x(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t)$ とすれば，連続関数の一様極限だから $x(t)$ も連続となり、次式が成立する。

$$x(t)=\underline{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(x_k(t)-x_{k-1}(t)).$$

この式と(8) から

$$\|x(t)-\underline{x}\|\leq\frac{M}{L}(e^{L\delta}-1)$$

が従う。

(iv) $x(t)$ は(2) を満たす。

実際、(iii) より一様収束の意味で

$$\|f(t,x_k(t))-f(t,x(t))\|\leq L\|x_k(t)-x(t)\|\to 0\quad(k\to\infty)$$

であり、$k\to\infty$ のとき

$$x_{k+1}(t)=\underline{x}+\int_{\underline{t}}^{t}ds\,f(s,x_k(s))\to\underline{x}+\int_{\underline{t}}^{t}ds\,f(s,x(s))=x(t).\qquad\Box$$

====================詳しい証明終わり=====================

問題：ところで、Picard の逐次近似法が何故、縮小写像の原理の応用になっているのだろうか？

問題：ところで、逐次近似式(3) は形式上 $f(t,x)$ が連続であれば定義できそうである。もし、連続しか仮定しないと何が起こるのだろうか？([I] では Lipschitz 連続性を用いていないと注意１で述べたことを思い出して欲しい)

====================おまけ====================

定理 6.2 (Vidossich) $I=[a,b]$ を有界閉区間、閉球 $B=B(\underline{x},\epsilon_0)=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x-\underline{x}\|\leq\epsilon_0\}$ とし、集合 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}=\{f\in C(I\times B:\mathbb{R}^m) \mid (b-a)\|f\|_\infty\leq\epsilon_0\}$ $(\|f\|_\infty=\sup\|f(t,x)\|)$ と定める。 $\mathcal{M}$ に一様収束位相を入れると、$\mathcal{M}$ の中で稠密な集合 $\mathcal{M}^*$ で次の条件を満たすものが存在する。

(i) $\mathcal{M}^*$ は $\mathcal{M}$ の中で第２類集合であり、

(ii) 任意の $f\in\mathcal{M}^*$ に対し $y_0\in C(I,B)$ をどのようにとっても、逐次近似

$$y_{n+1}(t)=\underline{x}+\int_0^t ds\,f(s,y_n(s))$$

は I 上で 一意的な $x_f(\cdot)$ に一様収束する。

系 6.1 上記の定理 *6.2* と同じ条件下で、初期値問題

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(a)=\underline{x}$$

は任意の $f\in\mathcal{M}^*$ に対して、一意的な解を持つ。

注意: $f(t,x)$ の連続性の仮定を更に弱めることは、色々と応用がある。その方面への一つの試みが Carathéodory によってなされている。

定理 6.3 (Carathéodory) $f(t,x)$ は閉領域 U 上で、x を固定すると t に関し可測、t を固定すると x に関して連続であるとする。区間 $|t-\underline{t}|\le\rho$ の上で *Lebesgue* 積分可能な関数 $m(t)$ が存在して

$$\|f(t,x)\|\le m(t)\quad((t,x)\in U)$$

となるならば、初期値問題(1) の拡張された意味での解が $|t-\underline{t}|\le\rho_0$ $(\exists\rho_0\le\rho)$ で存在する。

===================おまけ終わり===================

6.2 Cauchy の折れ線近似

講義では逐次近似法との関係で $f(t,x)$ が Lipschitz 連続でない時どうなるのか、という疑問から出発したのだが、それとは別にコンピュータを用いて数値計算をする時、無限小は表現しにくいからそれをどう工夫すればうまく計算できるのかという問題設定もある。

講義の仕方がまずかったようで、何をどう決めたのか分らないという質問があった。そこで、この小節は全面的に書き換え、次回にもちょっとは説明することとする。

重要な注意 f が Lipschitz 連続でない時は、解の一意性は保証されない例：$f(t,x)=2\sqrt{x}$ とするとこれは連続だが Lipschitz 連続では無く、

$$\frac{d}{dt}x(t)=2\sqrt{x(t)},\quad x(0)=0$$

を満たすものとして、$x(t)\equiv 0$ と $x(t)=t^2$ がある。即ち、上の微分方程式には相異なる 2 つの解がある！

［Euler の前進差分法］初期値問題 (1) の最も単純な数値解法は、時間に関する微分を差分に変えたスキームであろう：時間刻み幅 h に対し $t_n=\underline{t}+nh$ とし

$$x_{n+1}=x_n+hf(t_n,x_n)$$

とおいて数列 $\{x_n^\epsilon\}_{n\ge 0}$ を決めていくもの。

［Runge-Kutta 法］時間刻み幅 h と近似の精度の兼ね合いから、次ぎのスキームがもっともポピュラーとのことである：

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}(k_0+2k_1+2k_2+k_3),$$
$$k_0=hf(t_n,x_n),\quad k_1=hf(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{1}{2}k_0),$$
$$k_2=hf(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{1}{2}k_1),\quad k_3=hf(t_n+h,x_n+k_2).$$

定義 6.2 区間 I 上で $y(t)$ が微分方程式 $x'(t)=f(t,x)$ の ϵ-近似解とは、次の *(i)(ii)(iii)* を満たすことである。

(i) $y(t)$ は I 上の連続関数で、$(t,y(t))$ は関数 $f(t,x)$ の定義域内にある。

(ii) $y(t)$ は I 上で区分的連続微分可能、即ち、$y'(t)$ は I の有限個の点を除いて連続で、不連続点は第 1 種[1]である。

(iii) $y'(t)$ の不連続点の集合を G とするとき、$I-G$ 上で

$$\|y'(t)-f(t,y(t))\|\le\epsilon\quad(t\in I-G)$$

が成り立つ。

[1] $t=t_0$ で $y(t)$ が第 1 種不連続点をもつとは、右極限 $y(t_0+0)$ 及び左極限 $y(t_0-0)$ が有限な値として存在し、かつ相異なることである。ここで、有限個の第 1 種不連続点はそれを持つ関数の Riemann 積分には影響を与えないことが重要である

注意：f は Lipschitz 連続とし、任意の ϵ に対し ϵ-近似解があると仮定して考察してみる：$\epsilon_m \to 0 (m \to \infty)$ なる数列 $\{\epsilon_m\}$ をとり、I 上の ϵ_m-近似解 $y_m(t)$ が存在するとする。$y'_m(t)$ の第１種不連続点の集合を G_m とし、

$$R_m(t) = \begin{cases} y'_m(t) - f(t, y_m(t)), & (t \in I - G_m), \\ 0, & (t \in G_m), \end{cases}$$

と定義すると

$$\|R_m(t)\| \leq \epsilon_m \quad (t \in I)$$

が成立し、$m \to \infty$ のとき I で一様に０に収束している。$y_m(\underline{t}) = y_n(\underline{t}) = \underline{x}$ となっているときは、Gronwall の不等式を用いて

$$\|y_m(t) - y_n(t)\| \leq \frac{\epsilon_m + \epsilon_n}{L}(e^{L\delta} - 1)$$

となることが分かる。これより、連続関数 $y_m(t)$ は一様収束する極限 $x(t)$ をもつから、

$$f(t, y_m(t)) \to f(t, x(t)) \quad m \to \infty$$

となる。Riemann 積分の値には第１種不連続点の集合は影響を及ぼさないから、

$$y_m(t) = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} y'_m(s) ds = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} (f(s, y_m(s)) + R_m(s)) ds$$

となる。これより、$m \to \infty$ として

$$x(t) = \underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} f(s, x(s)) ds.$$

故に、連続関数 $x(t)$ は解である。 □

定理 6.4 (Cauchy-Peano の存在定理) 初期値問題(1) の右辺 f は $D = I \times \overline{B(\underline{x}; r)}$ 上で定義された $\mathbb{R}^m$-値連続関数とする。但し、

$$I = [\underline{t} - T, \underline{t} + T], \quad B(\underline{x}; r) = \{x \in \mathbb{R}^m \bigm| \|x - \underline{x}\| < r\}, \quad (T, r > 0).$$

このとき、少なくとも $|t - \underline{t}| \leq \delta$ で定義された (1) の局所解 $x(t)$ が存在する。ここで、$\delta = \min\{T, r/M\}$, $M = \sup_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|$ とおいた。

証明：$\underline{t}$ から右へ出る ϵ-近似解を構成する。$f(t, x)$ は閉領域 $\tilde{D}$ で一様連続だから、任意の $\epsilon > 0$ に対しある正数 $\eta(\epsilon)$ があって

$$|t - s| \leq \eta(\epsilon), \quad \|x - y\| \leq \eta(\epsilon)$$

ならば

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq \epsilon$$

が成り立つ。

そこで区間 $I^+ = [\underline{t}, \underline{t} + \delta]$ を小区間に分割する：

$$\underline{t} = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = \underline{t} + \delta.$$

但し、小区間は

$$|t_k - t_{k-1}| \leq \min\left\{\eta(\epsilon), \frac{\eta(\epsilon)}{M}\right\}$$

を満たすものとする。

$\underline{t}$ から出発する折れ線関数 $y(t)$ を次のように定義する：

$$\begin{cases} y(\underline{t}) = \underline{x}, \\ y(t) = y(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \quad t_{k-1} < t \le t_k \quad (k = 1, 2, \cdots, N). \end{cases}$$

$(\underline{t}, \underline{x})$ を通り傾きが $f(\underline{t}, \underline{x})$ の直線を引き、平面 $t = t_1$ と交わった点を (t_1, x_1) とする。次に (t_1, x_1) を通り傾きが $f(t_1, x_1)$ の直線を引き、平面 $t = t_2$ と交わった点を (t_2, x_2) とする。$\cdots$

こうして作った $y(t)$ が ϵ-近似解となる。実際、区分的連続微分可能なることは、各小区間では微分可能で

$$y'(t) = f(t_{k-1}, y(t_{k-1})), \quad t_{k-1} < t \le t_k,$$

となり、端点 $t = t_k$ では

$$y'(t_{k-1} - 0) = f(t_{k-1}, y(t_{k-1})), \quad y'(t_{k-1} + 0) = f(t_k, y(t_k)),$$

となることが分かる。だから、第 1 種不連続点となりうる点が高々$N - 1$ 個あることになる。また、任意の $t \in I^+$ に対しある $m(1 \le m \le N)$ があって $t_{m-1} < t \le t_m$ とすると、$|t - t_{m-1}| \le |t_m - t_{m-1}| \le \eta(\epsilon)$ であり、

$$\begin{aligned} \|y(t) - y(t_{m-1})\| &\le \|f(t_{m-1}, y(t_{m-1}))\| |t - t_{m-1}| \\ &\le M|t_m - t_{m-1}| \le M\left(\frac{\eta(\epsilon)}{M}\right) = \eta(\epsilon) \end{aligned}$$

が成り立つ。故に、$f(t, x)$ の一様連続性から

$$\|y'(t) - f(t, y(t))\| = \|f(t_{m-1}, y(t_{m-1})) - f(t, y(t))\| \le \epsilon$$

となる。

注意：上の折れ線の定義から、

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1})$$

であり、$t_{m-1} < t \le t_m$ に対して

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_{m-1}) + f(t_{m-1}, y(t_{m-1}))(t - t_{m-1}) \\ &= y(t_{m-2}) + f(t_{m-2}, y(t_{m-2}))(t_{m-1} - t_{m-2}) + f(t_{m-1}, y(t_{m-1}))(t - t_{m-1}) = \cdots \\ &= \underline{x} + f(\underline{t}, \underline{x})(t_1 - t_0) + f(t_1, y(t_1))(t_2 - t_1) + \cdots \\ &\qquad + f(t_{m-2}, y(t_{m-2}))(t_{m-1} - t_{m-2}) + f(t_{m-1}, y(t_{m-1}))(t - t_{m-1}) \end{aligned}$$

となる。これは

$$\underline{x} + \int_{\underline{t}}^{t} ds\, f(s, y(s))$$

の Riemann 和

$$\underline{x} + \sum_{k=1}^{m} f(\xi_{k-1}, y(\xi_{k-1}))(t_k - t_{k-1})$$

で $\xi_k = t_k (k = 0, 1, \cdots, m-1)$, $t_m = t$ としたものである。　　注意終

さて、0 に収束する数列 $\{\epsilon_m\}$ をとって、各 ϵ_m に対応する I 上の折れ線を $y_m(t)$ とする。この関数列は『(a) $\{y_m(t)\}$ は I 上で同程度連続、(b) $\{y_m(t)\}$ は I 上で一様有界』である。

(a): $t, s \in I$ に対し

$$\|y_m(t) - y_m(s)\| \leq M|t-s|$$

となる。実際 $t_{k-1} < t, s \leq t_k$ となる場合、

$$\|y_m(t) - y_m(s)\| = \|f(t_{k-1}, y_m(t_{k-1}))(t-s)\| \leq M|t-s|$$

なることは易しい。$t_{k-1} < t \leq t_k$、$t_{\ell-1} < s \leq t_\ell (\ell \geq k+1)$ となる場合、

$$\begin{aligned} y_m(t) - y_m(s) = f(t_{k-1}, y_m(t_{k-1}))(t_{k-1} - s) + f(t_k, y_m(t_k))(t_{k+1} - t_k) \\ + \cdots + f(t_{\ell-1}, y_m(t_{\ell-1}))(t - t_{\ell-1}) \end{aligned}$$

だから、

$$\|y_m(t) - y_m(s)\| \leq M|t_k - s| + M|t_{k+1} - t_k| + \cdots + M|t - t_{\ell-1}| = M|t-s|$$

となるから、同程度連続。

(b):(a) において $s = \underline{t}$ とおくと、

$$\|y_m(t)\| \leq M|t - \underline{t}| + \|y_m(\underline{t})\| \leq M\delta + \|\underline{x}\|$$

となるから、一様有界。

Ascoli-Arzela の定理より、部分列をとってそれを $y_{m_k}(t)$ と書くと

$$y_{m_k}(t) \to x(t) \quad (m_k \to \infty)$$

なる極限関数 $x(t)$ がある。このとき、一様収束性から積分と微分の交換ができて

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\underline{t}}^{t} f(s, y_{m_k}(s)) ds = \int_{\underline{t}}^{t} f(s, x(s)) ds$$

となる。従って

$$x(t) - \underline{x} = \int_{\underline{t}}^{t} f(s, x(s)) ds$$

故に、$x(t)$ は解である。 □

注意：解の一意性がないということとカオスとかは関連があるのかという質問があった。ここでは、解の性質について述べる時間もないが、カオスというのは十分長い時間後の解の性質としてあらわれるものとしてよい（現時点では解の短時間存在しか示していない）。カオスは「渾沌」とも解釈されるが、この概念の数学的定義はなかなか難しい！

==============================

メモ：出席者は 30 名程か？これはまずい！中間試験の感想文に色々な論評があったので、ゆっくり検討してみることにする。

人生には「起承転結」という言葉があり、学生諸君の現時点の段階は一般的にいって「承転」にあろう（ちなみに、私の場合は「転結」特に「結」の段階に来ている）。特に「承」の段階では「誰かから何かを受け継ぐ」為の心構えと努力が必要で、それを「嫌な努力」としない為の工夫も大切なことである。私の場合は「生理的に我慢できない状態」でない限り、「嫌などとはできるだけ思わずにまずやってみよう」ということにしてきた。この考え方は、ヒドクワルクハナイと思うのだが？