解析概論 I　第 12 回講義内容（2004 年 7 月 22 日）井上淳

中間試験答案返却

1　実数とその性質

2　距離空間とその位相

3　コンパクト集合

4　連結性

5　微分、Taylor の定理

6　常微分方程式の解の存在定理

7　陰関数定理とその応用

7.1　陰関数定理

7.2　逆関数定理

7.3　条件付き極値問題

7.4　１の分割定理

定義 7.1 $A \subset \mathbb{R}^n$ とし、 $f : A \to \mathbb{R}^m$ に対して $B = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ とおく。その閉包 $\overline{B}$ を f の台（*support*）といい $\mathrm{supp}\ f$ と表記する。

命題 7.1 *(1)* 2 つの関数 $f(t)$、$g(t)$ を

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad g(t) = \frac{f(4-t)}{f(4-t) + f(t-1)}$$

と定める。このとき、*(0)* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$、*(i)* $g \in C^\infty(\mathbb{R})$、*(ii)* $0 \leq g \leq 1$、*(iii)* $g(t) = 1 \Longleftrightarrow t \leq 1$、*(iv)* $g(t) = 0 \Longleftrightarrow t \geq 4$、*(v)* $\mathrm{supp}\ g = (-\infty, 4]$ である。
(2) 任意の $\delta > 0$ に対し *(1)* の g を用いて、$f_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f_\delta(x) = g(\|x\|^2/\delta^2)$ と定義する。このとき、*(i)* $f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$、*(ii)* $0 \leq f_\delta \leq 1$、*(iii)* $f_\delta(x) = 1 \Longleftrightarrow \|x\| \leq \delta$、*(iv)* $f_\delta(x) = 0 \Longleftrightarrow \|x\| \geq 2\delta$、*(v)* $\mathrm{supp}\ f_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\delta\}$ となる。

証明：容易である。また、上の f, g の代わりに

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

としてもよい。このとき、$h(t) = g(\frac{t+a}{a-b}) \cdot g(\frac{-t+a}{a-b})$ とすると $0 \leq h(t) \leq 1$ であり、$|t| \leq a$ では $h(t) = 0$、$|t| \leq b$ では $h(t) = 1$ となる。

定義 7.2 A を $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合とする。f が A 上で C^k-級[1]であるとは、A を含むある開集合 U 及び $g \in C^k(U)$ があって $g\big|_A = f$ となることとする。

定義 7.3 A 上の（可算個または有限個の）C^k-級関数の集合 Φ で、次の *(i)–(iv)* を満たすものを、A 上の 1 の（C^k-級）分割という。更に、Φ が $A(\subset \mathbb{R}^n)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、条件 *(v)* を満たす時 Φ は $\mathcal{U}$ に属する *(subordinate)* という：
(i) 各 $\varphi \in \Phi$ は $0 \leq \varphi \leq 1$ $(\forall x \in A)$ を満たす。
(ii) 任意の $x \in A$ に対し x の開近傍 $V(x)$ で、有限個を除いたすべての $\varphi \in \Phi$ は $V(x)$ 上で *0* に等しい。特に各 $x \in A$ に対し $\varphi(x) \neq 0$ となる $\varphi \in \Phi$ は有限個である。
(iii) 全ての $x \in A$ に対し、$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ である。
(iv) 各 $\varphi \in \Phi$ に対し、その台 $\operatorname{supp} \varphi$ はコンパクトな体積確定集合[2]である。
(v) 各 $\varphi \in \Phi$ に対し、ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ となる。

定義 7.4 A の 2 つの被覆 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$ は、任意の $V \in \mathcal{V}$ に対し $V \subset U \in \mathcal{U}$ となる U が存在する時、$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ より細かいといい、$\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ と記す。

定理 7.1 $\mathbb{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K と、K の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し、$\mathcal{U}$ に属する K 上の 1 の分割 Φ で、有限個の元から成るものが存在する。

注意：この定理の証明を講義中は説明しなかった。

証明：K の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ をとると、任意の $x \in K$ に対し $x \in U \in \mathcal{U}$ となる開集合 U がある。そこで $\delta_x > 0$ を十分小さくとって $B(x; \delta_x) \subset U$ とすると、$\mathcal{V} = \{B(x; \delta_x)\}_{x \in K}$ は K の開被覆であり、$\mathcal{U}$ より細かいことになる。更に、$\epsilon(x) > 0$ を $\delta_x > 3\epsilon(x)$ となるようにとると

$$B(x; \delta_x) \supset B(x; 3\epsilon(x)) \supset \overline{B(x; 2\epsilon(x))} \supset B(x; \epsilon(x)) \tag{1}$$

となる。$\{B(x; \epsilon(x))\}_{x \in K}$ は K の開被覆であり、K はコンパクトだから有限個の点 $x^1, \cdots, x^m$ と $B(x^i; \epsilon(x^i))$ で

$$\cup_{i=1}^m B(x^i; \epsilon(x^i)) \supset K, \quad \overline{B(x^i; \epsilon(x^i))} \subset B(x^i; \delta_{x^i}) \quad (1 \leq i \leq m) \tag{2}$$

となるものがある。命題 7.1 の f_δ を用いて

$$\varphi_i(x) = f_{\epsilon(x^i)}(x - x^i)$$

と定義すると、$\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で $0 \leq \varphi_i \leq 1$ である。

$$\operatorname{supp} \varphi_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^i\| \leq 2\epsilon(x_i)\} \tag{3}$$

[1] $f \in C^k(A)$ と表記する
[2] この概念は 1 年次に説明済みだと思われるが、後期講義でもう一度言及する

は閉球だから面積確定のコンパクト集合である。また、

$$x \in \overline{B(x^i; \epsilon(x^i))} \Longleftrightarrow \varphi_i(x) = 1$$

が成り立っているから、

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{m}(1 - \varphi_i(x))$$

とおくと、φ は以下の２条件

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$x \in \cup_{i=1}^m \overline{B(x^i; \epsilon(x^i))} \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \tag{4}$$

を満たす。$\varphi \geq 0,\ \varphi_i \geq 0$ であり、すべての i で $\varphi_i(x) = 0$ となる x に対しては $\varphi(x) = 1$ だから $\varphi(x) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) > 0$ となる。故に、

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi(x) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{5}$$

と定義できて、$\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり、$\Phi = \{\psi_i\}_{i=1}^m$ が $\mathcal{U}$ に属する１の分割である。実際、

(i) $\psi_i(x)$ の定義式と $\varphi, \varphi_i \geq 0$ から $0 \leq \psi_i \leq 1$ である。
(ii) Φ は有限個の元からなる。
(iii) 任意の $x \in K$ に対し(2) により $x \in B(x^i; \epsilon(x^i))$ となる i があるから、(4) より $\varphi(x) = 0$ となる。従って、$x \in K$ に対し $\sum_{i=1}^m \psi_i(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) / \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)) = 1$ となる。
(iv) (3) により $\operatorname{supp} \varphi_i = \overline{U(x^i; 2\epsilon(x^i))}$ は面積確定集合である。
(v) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U(x^i; \delta_{x^i}) \subset U \in \mathcal{U}$ である。 □

これ以降の内容は、講義では説明できなかった。広義積分可能性を説明する時に、説明を与える予定である。

命題 7.2 $\mathcal{U}$ を $A(\subset \mathbb{R}^m)$ の開被覆とする。コンパクト集合列 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}\ (n \in \mathbb{N}), \quad A = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n \tag{6}$$

なるものが存在すると仮定すると、$\mathcal{U}$ に属する A 上の１の C^∞-級分割が存在する。

証明：便宜上 $K_{-2} = K_{-1} = \emptyset$ とおく。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathcal{U}_n = \{U_n = U \cap (\overset{\circ}{K}_{n+1} \setminus K_{n-2}) \mid U \in \mathcal{U}\}$ と置けば $\mathcal{U}_n$ はコンパクト集合 $C_n = K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$ の開被覆である。

$\because$) 任意の $x \in C_n \subset A \subset \cup_{U \in \mathcal{U}} U$ は、ある $U \in \mathcal{U}$ に含まれるから、$x \in U_n \in \mathcal{U}_n$ である。ここで、$x \in K_n$ だから $x \in \overset{\circ}{K}_{n+1}$ であり、$x \notin \overset{\circ}{K}_{n-1}$ だから $x \notin K_{n-2}$ となることを注意せよ。

定理 7.1 より、$\mathcal{U}_n$ に属する C_n 上の１の分割 Φ_n で有限個の関数からなるものがある。このとき

$$n \geq \ell + 2 \text{ ならば } x \in K_\ell,\ \varphi \in \Phi_n \text{ に対して、} \varphi(x) = 0 \tag{7}$$

$\because$) Φ_n は $\mathcal{U}_n$ に属するから、ある $U \in \mathcal{U}$ に対し $\operatorname{supp} \varphi \subset U_n = U \cap (\overset{\circ}{K}_{n+1} \setminus K_{n-2})$ となる。K_{n-2} 上では $\varphi = 0$ だから、$n \geq \ell + 2$ ならば $K_\ell (\subset K_{n-2})$ 上で $\varphi = 0$ である。

そこで $f : A \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varphi \in \Phi_n} \varphi(x)$$

とおくと、(7) によって、この式の右辺 $\varphi(x)$ は有限個を除き 0 だから、$f(x) \in \mathbb{R}$ が定義される。より詳しくは、各 $x \in A$ に対して、$x \in K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1}$ となる $\ell \in \mathbb{N}$ が存在する。(7) により開集合 $\overset{\circ}{K}_{\ell+1} (\subset K_{\ell+1})$ 上で 0 とならない φ は、$n < \ell + 3$ に対する Ψ_n に属するから有限個しかない。従って、開集合 $\overset{\circ}{K}_{\ell+1}$ 上 f は有限個の C^∞-級関数の和である。一方、(6) により $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_n$ だから A は開集合で、f は A 上の C^∞-級関数である。任意の $x \in A$ に対して $x \in \overset{\circ}{K}_n$ となる最小の n をとれば $x \in C_n$ となる。従って、$\sum_{\varphi\in\Phi_n} \varphi(x) = 1$ だから $f(x) > 0$ なので、$\varphi \in \Phi_n$ に対し

$$\varphi^*(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

とおき、

$$\Psi = \{\varphi^* \mid \varphi \in \Phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

と定義する。この Φ が求める 1 の分割である。

$\because$) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で A 上 $f > 0$ だから $\varphi^* \in C^\infty(A)$ である。
(i) $0 \le \varphi \le 1$, $f > 0$ だから A 上で $0 \le \varphi^* \le 1$ である。(ii) 任意の $x \in A$ に対し $x \in K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1}$ とすると、開集合 $\overset{\circ}{K}_{\ell+1}$ 上で 0 でない φ^* は、$n < \ell + 3$ となる Φ_n に属する φ に対応するものだけだから、有限個である。(iii) 任意の $x \in A$ に対し

$$\sum_{\varphi^*\in\Phi} \varphi^*(x) = \frac{1}{f(x)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\varphi\in\Phi_n} \varphi(x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1.$$

(iv) $\mathrm{supp}\ \varphi^* = \mathrm{supp}\ \varphi$ はコンパクトな体積確定集合で、(v) $\varphi \in \Phi_n$ のとき $\mathrm{supp}\ \varphi \subset U_n \subset U \in \mathcal{U}$ となる。

これで Φ が求める 1 の分割であることが示された。 □

定理 7.2 任意の集合 $A (\subset \mathbb{R}^m)$ と、A の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、$\mathcal{U}$ に属する A 上の C^∞-級の 1 の分割 Φ が存在する。

証明：$W = \cup_{U\in\mathcal{U}} U$ は A を含む開集合で、$\mathcal{U}$ は W の開被覆である。$\mathcal{U}$ に属する W 上の 1 の分割は A 上の 1 の分割ともなる。従って、$\mathcal{U}$ に属する W 上の 1 の分割の存在を示せば良い。

この考察により、A は開集合として、それの開被覆 $\mathcal{U}$ に属する 1 の分割の存在を示せばよい。このために、上の命題 7.2 の条件(6) を満たす集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ってみせればよい。

各 n に対し

$$K_n = \{x \in A \mid \|x\| \le n, \quad d(x, A^b) \ge \frac{1}{n+1}\}$$

と置く。$d(x, A^b)$ はの連続関数だから、K_n は有界閉集合、即ち、コンパクト集合である。A は開集合だから、$A \cap A^b = \emptyset$ であり、任意の $x \in A$ に対し $d(x, A^b) > 0$ となるので、ある n があって $x \in K_n$ となる。従って、$A = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ であり、

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} = \{x \in A \mid \|x\| < n + 1, \quad d(x, A^b) > \frac{1}{n+1}\}$$

となる。これより条件(6) を満たす集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するから、命題 7.2 により、$\mathcal{U}$ に属する A 上の 1 の分割が存在する。 □

7.5　正則な境界—局所から大域への例として

定義 7.5 Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合でその境界を $\Gamma = \partial\Omega$ と書く。Ω が正則な境界 Γ を持つとは、任意の $x_0 \in \Gamma$ に対し C^∞ 関数 $\gamma(x)$ と、x_0 の近傍 U があって

$$\begin{aligned} &\Gamma \cap U = \{x \in U \mid \gamma(x) = 0\}, \quad \Omega \cap U = \{x \in U \mid \gamma(x) > 0\}, \\ &U \text{ の中で } \nabla_x \gamma = (\partial_{x_1}\gamma, \cdots, \partial_{x_n}\gamma) \neq 0,\ \ \Gamma \cap U \text{ 上で } |\nabla_x \gamma| = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

と書けることをいう。ここで、任意の $x \in \Gamma \cap U$ に対して内向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}_x = \nabla_x \gamma$ と記す。

命題 7.3 領域 Ω は正則な境界 Γ を持ち、任意の $x_0 \in \Gamma$ の近傍で Γ は(8) と表示されるとする。すると x_0 の近傍 $U_0(\subset U)$ と $\mathbb{R}^n$ の単位球 B_0 への座標変換 Ψ があって

$$(y,t) = \Psi(x) : U_0 \to B_0, \quad \Big((y,t) = (y_1, \cdots, y_{n-1}, t), \quad \left|\frac{\partial(y,t)}{\partial(x)}\right| \neq 0\Big)$$

で

$$\Omega \cap U_0 = \{\Psi^{-1}(y,t) \in U_0 \mid x = x' + t\nabla_x \gamma(x'), \quad x' = \Psi^{-1}(y,0) \in \Gamma, \quad (y,t) \in B_0\} \tag{9}$$

となる。それ故、もし $x \in \Omega \cap U_0$ が $x' \in \Gamma$ を通る法線上にあるならば、x と x' の距離は t と一致する。

演習問題 7.1 上の命題を証明せよ。

命題 7.4 Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界開集合で、正則な境界をもつとすると、$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ があって

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}, \quad \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}, \quad \Omega^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\},$$

と表示される。

証明：$\bar{\Omega}$ はコンパクトだから、Ω の開集合 $\{U_\nu\}_{\nu=0}^{\ell}$ で以下を満たすものがある：

$$U_0 \Subset \Omega, \quad U_\nu \cap \Gamma \neq \emptyset\ (\nu = 1, \cdots, \ell),\ \nu \geq 1 \text{ なる } U_\nu \text{ に対して(8) を満たす } \gamma_\nu(x) \text{ がある。}$$

このとき、$\{\varphi_\nu\}_{\nu=0}^{\ell}$ を開被覆 $\{U_\nu\}_{\nu=0}^{\ell}$ に対応する 1 の分割とする、即ち、$\bar{\Omega}$ 上で $\sum_{\nu=0}^{\ell} \varphi_\nu(x) = 1$ となるものとする。

$$f(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\ell} \varphi_\nu(x)\gamma_\nu(x)$$

とおけば良い。　□

8　$\mathbb{R}^n$ 内の多様体なるものをちょっと

定義 8.1 $\mathbb{N} \ni r \geq 1$ とする。次の条件 *(i)–(v)* を満たす写像 f を $\mathbb{R}^n$ 内の C^r-級 k 次元パラメタ付き多様体という。特に、$k = 1, 2, n-1$ のとき、それぞれ曲線、曲面、超曲面という。

(i) f の定義域 $D = D_f$ は、k 次元数空間 $\mathbb{R}^k$ の空でない開集合である。

(ii) f は D から $\mathbb{R}^n$ への C^r-級写像で、

(iii) $\operatorname{rank} f'(u) = k \quad (\forall u \in D)$

(iv) f は D から $f(D)$ への一対一写像で、

(v) 逆写像 $f^{-1} : f(D) \to D$ は連続である。

f の像 $f(D)$ を、このパラメタ付き多様体 f の跡といい $S_p(f)$ であらわす。f の逆写像 f^{-1} を $S_p(f)$ 上の座標系という。

例：$D=\{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ とし、$f:D\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2}\end{pmatrix}$$

と定めると、f は $\mathbb{R}^3$ 内の C^∞-級 2 次元パラメタ付き多様体である。

定義 8.2 $r\geq 1$ を自然数とする。$\mathbb{R}^n$ 内の 2 つの C^r-級 k 次元パラメタ付き多様体 f,g は、f の定義域 D_f から g の定義域 D_g の上への C^r-級同相写像 φ が存在して

$$f=g\circ\varphi$$

となるとき（C^r-級）同値であるという。この同値関係で同一視したものを $\mathbb{R}^n$ 内の C^r-級 k 次元パラメタ多様体という。

例：$S^2=\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ は 2 次元パラメタ多様体（の跡）ではない。即ち、$S_pf=S^2$ となる 2 次元パラメタ付き多様体 f は存在しない。

定義 8.3 k と $r\geq 1$ を自然数とする。$\mathbb{R}^n$ の部分集合 M は、M の各点 p に対し、p を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U があって、$M\cap U$ がある k 次元 C^r-級パラメタ付き多様体 f の跡となるとき、$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r 級多様体であるという。このとき、f を p のまわりの M の局所パラメタ、f^{-1} を局所座標系、D_f の点の座標を ${}^t(u_1,\cdots,u_k)$ とするとき、$x_i=u_i\circ f$ と置いて $(x_1,\cdots,x_k)$ を p のまわりの局所座標という。また、$M\cap U$ をこの局所座標系の座標近傍という。$k=1,2,n-1$ のとき、多様体をそれぞれ曲線、曲面、超曲面という。

例：$S^2=\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元多様体、即ち曲面である。

例：$S^{n-1}=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2=a^2\}$ $(a>0)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の C^∞-級超曲面である。

例：二次実行列の空間 $M(2,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^4$ と同一視する。$G=SL(2,\mathbb{R})=\{x\in M(2,\mathbb{R}) \mid \det x=1\}$ は $\mathbb{R}^4$ 内の C^∞-級超曲面である。

定理 8.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 M と $r\geq 1$ に対し以下は同値である：

(a) M は $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r-級多様体である。

(b) M の各点 x に対し、x を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と、U から $\mathbb{R}^n$ の開集合 V の上への C^r-級同相写像 h があって

$$h(M\cap U)=\{y\in V \mid y_{k+1}=\cdots=y_n=0\}$$

と書き表せる。

証明：$(b)\implies(a)$ M が (b) を満たすとする。$D=\left\{u\in\mathbb{R}^k \mid \begin{pmatrix} u \\ 0\end{pmatrix}\in V\right\}$ とし、$f:D\to\mathbb{R}^n$ を $f(u)=h^{-1}(u,0)$ と定めると、f は C^r 級 k 次元 C^r 級パラメタ付き多様体であり、その跡 $f(D)=M\cap U$ となる。実際、D は $\mathbb{R}^k$ の開集合で、f は C^r 級である。h は C^r 級同相写像だから、$\det(h^{-1})'(y)\neq 0$ $(\forall y\in V)$ であり、$(h^{-1})'(y)$ の最初の k 個の列ベクトルは一次独立である。従って、$(h^{-1})'(u,0)$ $(\forall u\in D)$ の最初の k 個の列ベクトルからなる (n,k) 行列 $f'(u)$ の階数は k である。h^{-1} が一対一写像だから、f も一対一である。(b) より $h(M\cap U)=V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}^{n-k})$ だから

$$f(D)=h^{-1}(D\times\{0\}^{n-k})=h^{-1}(V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}^{n-k}))=M\cap U.$$

$(a) \Longrightarrow (b)$ M が (a) を満たすとする。各 $x_0 \in M$ に対し x_0 を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と x_0 のまわりの局所パラメタ f が存在して、f の跡が $M \cap U$ となる。f は一対一写像だから、任意の $x \in M \cap U$ に対して、$f(u) = x$ となる $u \in D = D_f$ （f の定義域である $\mathbb{R}^k$ の開集合）が唯一つ存在する。特に $f(u_0) = x_0$ とする。定義より $\operatorname{rank} f'(u) = k$ だから、必要ならば座標の番号を取り替え、U を小さく取り直せば

$$\det\left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j}\right)_{1 \le i,j \le k} \neq 0 \quad (\forall u \in D)$$

と仮定して良い。このとき $g : D \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ を

$$g(u,v) = f(u) + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (u \in D,\ v \in \mathbb{R}^{n-k})$$

と定義すると

$$g'(u,v) = \begin{vmatrix} f'(u) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j}\right)_{1 \le i,j \le k} \neq 0 \quad (\forall u \in D)$$

となる。故に、逆関数定理を用いて、$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} = w_0$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V' と $g(u_0, 0) = x_0$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V_2' が存在して、$g_1 = g\big|_{V_1'}$ は V_1' から V_2' の上への C^r-級同相写像で、逆写像 $h = g_1^{-1} : V_2' \to V_1'$ も C^r 級である。いま $B = \{f(u) \mid \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1'\}$ とおくとき、$\mathbb{R}^n$ のある開集合 $W \subset U$ が存在して

$$B = W \cap f(D)$$

となる。

実際、任意の $x = f(u) \in B$ に対し、u は $\mathbb{R}^k$ の開集合 D の点だから $\epsilon > 0$ を小さくとれば、k 次元近傍 $U_k(u, \epsilon) = \{c \in \mathbb{R}^k \mid ||c - u|| < \epsilon\}$ は D に含まれる。$f(u') = x'$ が $x = f(u)$ に十分近ければ、f^{-1} の連続性から、$u' \in U_k(u, \epsilon)$ となる。また V_1' は開集合で、$\epsilon > 0$ を十分近くとるとき $\begin{pmatrix} u' \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1'$ であるから $x' = f(u') \in B$ となる。そこで各 $x \in B$ に対して $\delta_x > 0$ が存在して、$U_n(x, \delta_x) = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid ||x' - x|| < \delta_x\}$ とおくとき

$$U_n(x, \delta_x) \cap f(D) \subset B$$

が成立する。従って、$W = \cup_{x \in B} U_n(x, \delta_x)$ と置くと、W は $\mathbb{R}^n$ の開集合で $B = W \cap f(D)$ を満たす。$f(D) \subset U$ だから、W を $W \cap U$ と取り直して $W \subset U$ となる。

そこで $B = W \cap f(D)$ を満たす W に対し $V_2 = V_2' \cap W$、$V_1 = g^{-1}(V_2)$ と置く。すると、$V_2 = V_2 \cap W$、$W \cap U = W$ だから

$$\begin{aligned} V_2 \cap M &= V_2 \cap W \cap U \cap M = V_2 \cap W \cap f(D) = V_2 \cap B \\ &= \left\{ f(u) \in V_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1' \right\} = \left\{ g(u,0) \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1 \right\} \end{aligned}$$

となる。故に、

$$\begin{aligned} h(V_1 \cap M) &= g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}\left\{ g(u,0) \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1 \right\} = \{y \in V_1 \mid y_{k+1} = \cdots = y_n\} \end{aligned}$$

となる。従って (V_1, V_2, h) が (b) の (U, V, h) の条件を満たす。 □

系 8.1 $\mathbb{N} \ni r \geq 1$ とする。$\mathbb{R}^n$ の k 次元 C^r-級多様体 M の各点 x に対し、x を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と $U \cap M$ を跡とする x のまわりの局所パラメタ f であって、以下の条件 *(L)* を満たすものがある：

$$\textit{(L)}\quad U \text{ から } \mathbb{R}^k \text{ への } C^r\text{-級写像 } F \text{ があって } F\big|_{M\cap U} = f^{-1} \text{ となる。}$$

証明：$\varphi(u) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$ $(u \in D)$, $p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u$ は共に C^∞-級写像である。定理 8.1 の $(a) \Longrightarrow (b)$ の部分の証明において、写像 h は $h = g^{-1}$ として定義されたから、任意の $u \in D$ に対して

$$(h\circ f)(u) = g^{-1}(f(u)) = g^{-1}(g(u,0)) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(u)$$

であり、$h\circ f = \varphi$ が成り立つ。そこで、$F = p\circ h$ とおけば、$F : U \to \mathbb{R}^k$ は C^r-級写像で、$p\big|_{V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}^{n-k})} = \varphi^{-1}$ だから

$$F\big|_{M\cap V} = \varphi^{-1}\circ h = f^{-1}$$

となる。実際、$u \in D$, $f(u) = x$ に対して

$$(\varphi^{-1}\circ h)(x) = (\varphi^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(u) = (\varphi^{-1}\circ\varphi)(u) = u = f^{-1}(x)$$

が成り立つ。　□

命題 8.1 M を $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r-級多様体とする。M の二つの局所パラメタ f, g の跡 $f(D_f) = U \cap M = U_1$ と $g(D_g) = V \cap M = V_1$ が交わるとする。$D_1 = f^{-1}(U \cap V \cap M)$、$D_2 = g{-}1(U \cap V \cap M)$ と置くとき、D_1, D_2 への f, g の制限を f_1, g_1 とすると、k 次元 C^r-級パラメタ付き多様体 f_1 と g_1 は C^r-級同値である。

証明：定理の系 8.1 により、C^r-級写像 $F : U \to \mathbb{R}^k$, $G : V \to \mathbb{R}^k$ が存在して

$$F\big|_{U\cap M} = f^{-1}, \quad G\big|_{V\cap M} = g^{-1}$$

となる。このとき、$\varphi = g_1^{-1}\circ f_1 : D_1 \to D_2$ は全単射で、$\varphi = G\circ f_1$ だから C^r-級である。同様に、$\varphi^{-1} = f_1^{-1}\circ g_1 = F\circ g_1$ も C^r-級である。従って、φ は D_1 から D_2 への C^r-級同相写像で、$f_1 = g_1\circ\varphi$ だから、f_1 と g_1 は C^r-級同値である。　□

定義 8.4 M が $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元 C^r-級多様体、M の一点 p をとり、p のまわりの局所パラメタ f をとり、$f(u) = p$ とする。このとき、$\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^n$ への一次写像 $(df)_u$ による $\mathbb{R}^k$ の像

$$(df)_u(\mathbb{R}^k) = f'(u)\mathbb{R}^k$$

を M の p における接ベクトル空間といい TM_p と表す。TM_p の元を p における M の接ベクトルという。

このとき『$(df)_u$ は $\mathbb{R}^k$ から TM_p への全単射一次写像で、$\dim TM_p = k$ である。』

> 実際、TM_p の定義より $(df)_u$ は全射である。また $\dim TM_p = \operatorname{rank} f'(u) = k = \dim \mathbb{R}^k$ だから $(df)_u$ は単射である。

$\operatorname{rank} f'(u) = k$ だから TM_p は $\mathbb{R}^n$ の k 次元部分ベクトル空間だる。また別の局所パラメタ g をとると、命題 8.1 より $g = f \circ \varphi$、$g'(v) = f'(u)\varphi'(u)$ で $\det\varphi'(u) \neq 0$ だから、$(dg)_v\mathbb{R}^k = (df)_u\mathbb{R}^k$ であり、TM_p は局所パラメタの取り方に依存しない。

例：U が $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f^*U \to \mathbb{R}$ が C^1-級関数のとき f のグラフ

$$\Gamma_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x \in U \right\}$$

は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の C^1-級超曲面で、その一点 $p = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ における接超平面は方程式

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で与えられる。

==

メモ：受講者は 30 名程。去年度と比べ、受講者との波長があわない気がしているのだが、その理由が証明に割く時間が少なすぎるからだとすると、後期は立て直さなくてはなるまい。期末試験については、相当詳しく予告をしておいたので、受講者諸君も何とか合格してくれるだろう。