

1 実数とその性質

2 距離空間とその位相

3 コンパクト集合

コンパクト性を用いている最初の例として、「 \mathbb{R} の有界閉集合の上の連続関数は最大値、最小値を持つ」ことの証明を思い出してもらった。

解析学の本質的な問題は「無限」をどう扱うかであるが、この無限をうまく制御するためには「コンパクト」という概念が、極めて重要である。有限次元距離空間では、簡単に特徴付けでき、それを用いて、例えば、「 \mathbb{R}^m の有界閉集合の上の連続関数は最大値、最小値を持つ」が証明できる。ところが、偏微分方程式を取り扱うとき自然に出てくる無限次元距離空間での集合は、問題に応じるが、期待したいコンパクト性が「弱い意味」でしか保証できないことが多い。この方面の考察も最近盛んである。

3.1 コンパクト性

定義 3.1 距離空間 X における部分集合の族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ が $\cup A_\alpha = X$ を満たすとき、 X の被覆であるという。 \mathcal{A} の各元が開集合のときに開被覆と言う。 \mathcal{A} の部分族が X の被覆になっているとき、部分被覆 (subcover) という。

定義 3.2 距離空間 X における部分集合 A の任意の開被覆から有限個の部分被覆がとれるとき、 A をコンパクトであるという。

定理 3.1 距離空間 (X, d) を一つ取る。このとき

X における部分集合 A がコンパクトである

\iff 集合 A の各点 x において、 x の近傍 $U(x)$ が一つずつ与えられているとき、このうちの適当な有限個 U_1, \dots, U_m をとって、これらで A を被うようにすることができる。

証明： \implies) A をコンパクトとし、集合 A の各点 x において、 x の近傍 $U(x)$ が一つずつ与えられているとする。 $\{U(x)\}_{x \in A}$ は A の開被覆であるから、有限個 U_1, \dots, U_m をとって、これらで A を被うようにすることができる。

\impliedby) A の任意の開被覆 $\{O_\alpha\}$ をとる。任意の $x \in A$ に対して α があって $x \in O_\alpha$ となるから、 x の近傍 $U(x)$ を $U(x) \subset O_\alpha$ となるようにとることができる。このようにして各 x に対して一つずつ x の近傍を対応させ得るので、仮定より、適当な有限個 U_1, \dots, U_m をとって、これらで A を被うようにすることができる。各 j に対して $U_j \subset O_{\alpha_j}$ となる O_{α_j} をとれば、これが望みの有限個の部分被覆となる。 \square

定理 3.2 距離空間 (X, d) を一つ取る。このとき

- (1) X におけるコンパクト集合 A は直径有限な閉集合である。
- (2) A がコンパクトならば、 A に含まれる任意の閉集合もコンパクトである。
- (3) A がコンパクトであることと、 A が X の部分空間としてコンパクト距離空間であることは同値である。

証明：(1) A をコンパクトとする。任意の $\epsilon > 0$ を一つ固定し、 A の各点 x に対し $U_\epsilon(x)$ を対応させると、 $A \subset \bigcup_{j=1}^m U_\epsilon(x_j)$ とすることができる。故に、

$$\text{diam } A \leq \sum_{j=1}^m \text{diam } U_\epsilon(x_j) + \sum_{j,k=1}^m d(U_\epsilon(x_j), U_\epsilon(x_k))^1 \leq 2\epsilon m + \sum_{j,k=1}^m d(x_j, x_k) < \infty$$

任意に $a \notin A$ をとる。各 $x \in A$ に対し近傍として $U(x; d(a, x)/2)$ を対応させると A がコンパクトより

$$A \subset U(x_1; d(a, x_1)/2) \cup \cdots \cup U(x_m; d(a, x_m)/2)$$

となる。そこで

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\{d(a, x_1), \dots, d(a, x_m)\}$$

ととると、 $U_\epsilon(a)$ は、いずれの k に対しても $U_\epsilon(a) \cap U(x_k; d(a, x_k)/2) = \emptyset$ だから $U_\epsilon(a) \cap A = \emptyset$ となる。これは $a \notin A \implies a \notin \bar{A}$ を意味するので、 $\bar{A} \subset A$ 、即ち、 $\bar{A} = A$ となる。

(2) A をコンパクト、 B は A に含まれる閉集合とし、 B の各点 x に対して近傍 $U(x)$ が一つずつ与えられているとする。 $x \in A$ かつ $x \notin B$ なるものに対しては $U(x) \cap B = \emptyset$ であるような近傍 $U(x)$ をとることができる²。 A はコンパクトだから有限個で

$$A \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_m)$$

被覆されるから、当然

$$B \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_m)$$

となる。更に $x_k \notin B$ ならば $U(x_k) \cap B = \emptyset$ だからそのようなものを除いて

$$B \subset U(x_{k_1}) \cup \cdots \cup U(x_{k_\ell})$$

とできる。 $U(x_{k_j})$ は B の近傍だから、 B はコンパクトである。

(3) A を X のコンパクト集合とする。 A を X の部分空間として考えれば、任意の $x \in A$ に対して、 A での近傍 $U_\epsilon^A(x)$ は、 x の X での近傍 $U_\epsilon^X(x)$ と A の共通部分、 $U_\epsilon^A(x) = U_\epsilon^X(x) \cap A$ となる。そこで部分空間 A の各点 x に一つずつ近傍 $U^A(x)$ を与えれば、各 $U^A(x) = U^X(x) \cap A$ として X の集合 A の各点 x に一つずつ近傍 $U^X(x)$ が与えられたことになり、コンパクトであることより、そのうちの有限個で

$$A \subset U^X(x_1) \cup \cdots \cup U^X(x_m)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} A &= A \cap (U^X(x_1) \cup \cdots \cup U^X(x_m)) \\ &= (A \cap U^X(x_1)) \cup (A \cap U^X(x_2)) \cup \cdots \cup (A \cap U^X(x_m)) = U^A(x_1) \cup \cdots \cup U^A(x_m). \end{aligned}$$

故に、 A がコンパクト距離空間になることが示された。

逆に、 A を X の部分空間としてコンパクトとし、 A の各点 x に一つずつ近傍 $U^X(x)$ を与える。 $U^A(x) = U^X(x) \cap A$ とすると A の各点 x に近傍 $U^A(x)$ が与えられたことになるから、 A がコンパクト距離空間なることは、有限個の近傍で $A \subset U^A(x_1) \cup \cdots \cup U^A(x_m)$ と被われる。即ち、 $A \subset U^X(x_1) \cup \cdots \cup U^X(x_m)$ となるから、 A は X でコンパクトなることが示された。□

¹ 2つの集合 A, B に対してその間の距離を $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ と定める

² $x \in B$ ならば x の任意の近傍 $V(x)$ は B と共通部分を持つ

定義 3.3 (X, d) を距離空間とする。 X の任意の部分集合 Y をとり、 Y の任意の元 x, y に対して、 $d'(x, y) = d(x, y)$ と定めると、 (Y, d') は距離空間をなす。これを、距離空間 X の部分 (距離) 空間という。

定義 3.4 X の集合 Y に対して、 $A \subset Y$ が部分空間としての Y における閉集合 (或いは開集合) であるとき、 A は Y の相対閉集合 (或いは相対開集合) であるという。

例 : $X = \mathbb{R}$ の集合 $A = (0, 1]$ は $Y = (0, 5)$ の相対閉集合である。

定義 3.5 距離空間 X の部分集合 A が全有界 (totally bounded) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、直径が高々 ϵ の有限個の集合 A_1, \dots, A_m の和集合として表されることである。

演習問題 3.1 『距離空間 X の部分集合 A が全有界

\iff 任意の $\epsilon > 0$ に対して、 A が有限個の $U_\epsilon(x)$ の形の集合で被われる』ことを示せ。

定義 3.6 距離空間が可分 (separable) であるとは、稠密な可算集合が存在することである。

定理 3.3 距離空間 X の全有界な集合 A は、部分距離空間と考えて可分である。

証明 : A を全有界とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して A は $U_\epsilon(x)$ の有限個で被われる。特に $\epsilon = 1/m$ として

$$A \subset U_{1/m}(x_{m,1}) \cup U_{1/m}(x_{m,2}) \cup \dots \cup U_{1/m}(x_{m,l_m}), \quad x_{m,j} \in A$$

となる。点集合 $D = \{x_{m,k} \mid k = 1, \dots, l_m, m = 1, 2, \dots\}$ は A で稠密である。実際、 $x \in A$ の任意の近傍 $U_\epsilon(x)$ をとるとき、 $1/m < \epsilon$ なる自然数 m が存在する。この m に対し、ある k をとれば $x \in U_{1/m}(x_{m,k})$ となる。これより $x_{m,k} \in U_{1/m}(x_{m,k}) \subset U_\epsilon(x)$ となり $A \subset \bar{D}$ が示された。 D の A における閉包は $A \cap \bar{D}$ だから、 D が部分空間 A において稠密、 A は部分距離空間と考えて可分である。 \square

定理 3.4 (Lindelöf の被覆定理) X を可分な距離空間、 A を部分集合とする。各点 $x \in A$ で x の近傍 $U(x)$ が一つづつ与えられているとき、適当な可算個 U_1, U_2, \dots で A を被うことができる。

証明 : $U(x) = U(x; \epsilon_x)$ とし $A_m = \{x \mid x \in A, \epsilon_x \geq 1/m\}$ とおくと、

$$(*) \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots, \cup A_m = A$$

である。仮定より X の稠密な可算集合 $D = \{q_1, q_2, \dots\}$ があるが、 D の各点の $1/(2m)$ 近傍を考えるとこれらの和集合は X を被う。これらの近傍のうち A_m と共通点をもつものを $U(q_{m,j}; 1/(2m)) (j = 1, 2, \dots)$ とすると、

$$(**) \quad A_m \subset \cup_j U(q_{m,j}; 1/(2m))$$

となる。 $A_m \cap U(q_{m,j}; 1/(2m))$ に属する一つの点 $x_{m,j}$ をとると、 $y \in U(q_{m,j}; 1/(2m))$ を任意にとるとき

$$d(y, q_{m,j}) < \frac{1}{2m}, \quad d(x_{m,j}, q_{m,j}) < \frac{1}{2m}$$

だから

$$d(x_{m,j}, y) \leq d(x_{m,j}, q_{m,j}) + d(y, q_{m,j}) < \frac{1}{m} \leq \epsilon_{x_{m,j}}.$$

即ち、 $y \in U(x_{m,j}; \epsilon_{x_{m,j}})$ である。故に、 $U(q_{m,j}; 1/(2m)) \subset U(x_{m,j}; \epsilon_{x_{m,j}})$ となるから、 $(**)$ を用いて

$$A_m \subset \cup_j U(x_{m,j}; \epsilon_{x_{m,j}})$$

$(*)$ を用いて

$$A \subset \cup_m A_m \subset \cup_m \cup_j U(x_{m,j}; \epsilon_{x_{m,j}}).$$

この式の右辺はに表れた近傍は高々可算個だから、それらの名前を付け替えればよい。 \square

定理 3.5 距離空間 (X, d) を一つ取る。このとき以下の条件は同値である：

- (a) X の集合 A がコンパクトである。
- (b) 集合 A の任意の無限部分集合 B が、 A の中に少なくとも一つ集積点をもつ。
- (c) 集合 A の任意の点列 $\{a_j\}$ から、常に A のある一点に収束するような部分列 $\{a_{m_j}\}$ を取りだせる。
- (d) 集合 A が全有界であり、かつ X の部分距離空間とみなして完備である。

証明：(a) \implies (b) もしも A のいかなる点も無限集合 B の集積点ではない³とする。即ち、 A の任意の点 x に対し、 x の近傍 $U_{\epsilon_x}(x)$ で $U_{\epsilon_x}(x) \cap B = \emptyset$ か或いは $U_{\epsilon_x}(x) \cap B = \{x\}$ となるものが存在する。 A はコンパクトより、有限個の近傍で

$$A \subset U_{\epsilon_{x_1}}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\epsilon_{x_m}}(x_m)$$

と被われる。 $B \subset A$ より、上式の両辺と B の共通部分は

$$B \subset (B \cap U_{\epsilon_{x_1}}(x_1)) \cup \cdots \cup (B \cap U_{\epsilon_{x_m}}(x_m))$$

となる。 $B \cap U_{\epsilon_{x_j}}(x_j)$ は空集合かただ一つの点 $\{x_j\}$ からなるから、 B は高々 m 個の点からなる有限集合ということになって、 B が無限集合である仮定に反する。

(b) \implies (c) これは明らか。

(c) \implies (d) (背理法) 全有界でないとして矛盾を出す：ある $\epsilon > 0$ に対して、どのように有限個の $U_\epsilon(x)$ をとっても、それらの和集合に A がすっかり含まれることはないとする。 $a_1 \in A$ は任意にとり、 $a_2 \in A$ かつ $a_2 \in U_\epsilon(a_1)$ ⁴なる a_2 を選ぶ。順次 a_1, \dots, a_k まで選べたとすると、背理法の仮定より $A \subset U_\epsilon(a_1) \cup \cdots \cup U_\epsilon(a_k)$ とはならないので、 $a_{k+1} \in A$ かつ $a_{k+1} \notin U_\epsilon(a_1) \cup \cdots \cup U_\epsilon(a_k)$ となる a_{k+1} が選べる。数学的帰納法で点列 a_1, a_2, \dots が定まる。定理の仮定より、この点列は A のある点に収束する部分列 a_{m_1}, a_{m_2}, \dots をもつ。この部分列は基本列であるから、 N を十分大きくとれば、上の ϵ に対し $k, \ell \geq N$ のとき $d(a_{m_k}, a_{m_\ell}) < \epsilon$ となる。ところで $m_k < m_\ell$ とすれば、上の点列の作り方から $a_{m_\ell} \notin U_\epsilon(a_{m_k})$ のはずであるから、これは矛盾である。故に A は全有界である。

次に a_1, a_2, \dots を A における基本列とする。定理の仮定より、この数列は A のある一点に収束する部分列を持つ。ところで基本列は、その部分列が収束すれば、それ自身が同じ点に収束するから、結局任意の基本列は収束することになる。

(d) \implies (a) 定理 3.2(3) により A が完備なコンパクト距離空間と見なせることを示せばよい。各点 $x \in A$ に x の近傍 $U(x)$ が一つずつ与えられるとすると、以下の定理 3.4 より、適当な可算個 U_1, U_2, \dots によって A が被われる。そこで、この可算個の被覆から有限個の被覆がとれないと仮定して矛盾をだす。この背理法の仮定から $A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m$ とはならないので、 $a_m \notin U_1 \cup \cdots \cup U_m$ となる点がある。 A は全有界だから、このようにして作った点列 $\{a_j\}$ から一つの部分列として基本列を選ぶことができる。実際、 A は直径が 1 より小さい集合の有限個の和集合になるから、そのうちどれか一つに点列 $\{a_j\}$ の無限に多くの項を含んでいなければならない。それらを $a_{m(1,1)}, a_{m(1,2)}, \dots$ とする。 A を直径 $1/2$ 以下の有限個の和集合で被い、同様の議論で $a_{m(1,1)}, a_{m(1,2)}, \dots$ から部分列 $a_{m(2,1)}, a_{m(2,2)}, \dots$ を選ぶ。これを繰り返して、直径 $1/k$ 以下の有限個の和集合で被い、部分列 $a_{m(k,1)}, a_{m(k,2)}, \dots$ をとる。これらの点列から (対角線論法で) $a_{m(1,1)}, a_{m(2,2)}, \dots, a_{m(k,k)}, \dots$ をとると、任意の k に対し $a_{m(k,k)}, a_{m(k+1,k+1)}, \dots$ は $a_{m(k,1)}, a_{m(k,2)}, \dots$ の部分列であり、 $d(a_{m(l,l)}, a_{m(l',l')}) < 1/k (l, l' \geq k)$ 、即ち、基本列となる。

A は完備だからこの基本列は A のある点 a に収束する。 U_1, U_2, \dots によって A が被われているので、ある j があって $a \in U_j$ となる。 U_j は開集合だから a の開近傍 $U_\epsilon(a) \subset U_j$ がとれる。 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m(k,k)} = a$ より

³ 「無限集合 B の集積点」とは何かと言う質問があった。その否定が説明してあるのだから見当はつくと思うが、点 b が無限集合 B の集積点であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し $U_\epsilon(b) \cap B \neq \emptyset$ となることである

⁴ 前の版で $a_2 \notin U_\epsilon(a_1) \cap A$ と書かれていたが「 $a_2 \in A$ かつ $a_2 \in U_\epsilon(a_1)$ 」となるのではないかという質問があった。絵を書き、少し後を読むと分かるはずなのだが面倒なので書き換えておく

k を十分大きくとると $a_{m(k,k)} \in U_\epsilon(a)$ であり、必要ならば k を更に大きくとって $m(k,k) > j$ とできるから $a_{m(k,k)} \notin U_j$ となる。これら $a_{m(k,k)} \notin U_j$ 、 $a_{m(k,k)} \in U_\epsilon(a)$ 及び $U_\epsilon(a) \subset U_j$ は矛盾する。 \square

演習問題 3.2 (1) $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$ が共に空でないコンパクト集合とし、 $f : K \times L \rightarrow \mathbb{R}$ が連続とする。このとき、

$$\max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x, y) \leq \min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x, y) \quad (1)$$

の両辺が存在して、この不等式が成り立つことを示せ。

(2) $(a, b) \in K \times L$ が $f : K \times L \rightarrow \mathbb{R}$ の鞍(馬)点であるとは、

$$(i) f(x, b) \leq f(a, b) (\forall x \in K) \text{ かつ } (ii) f(a, b) \leq f(a, y) (\forall y \in L)$$

が成り立つことを言う。(1) で不等式(1) の等号が成立する必要十分条件は f が鞍点を持つことであり、 f の鞍点での値が不等式(1) の両辺に等しくなることを示せ。

例：区間 $[0, 1]$ における有理点の集合は、全有界だがコンパクトではない。

例：数列 $\{a_n\}$ が a に収束しているとする。このとき集合 $\{a_1, a_2, \dots, a\}$ はコンパクトである。

例：数列 $\{a_n\}$ が基本列をなすならば、集合 $\{a_1, a_2, \dots\}$ は全有界である。

演習問題 3.3 有界だが全有界ではない集合は、どのような距離空間で存在するのか？

=====

メモ： ℓ^2 での単位球は有界閉集合だがコンパクトではないことを少し説明した。常微分方程式 $\dot{x} = f(t, x)$ の解法で $f(t, x)$ が Lipschitz 連続でないときは逐次近似法が必ずしも機能しない。このようなとき、Cauchy の折線の具体的定義はせずに、その方法があって、その場合は $C([a, b])$ におけるコンパクトに関する Ascoli-Arzelà の補題を用いることを述べておいた。

それはそうと、出席者が大分減ったのは、残念である。