

解析概論 I 第 8 回講義内容 (2005 年 6 月 24 日) 井上淳

来週 7 月 1 日は中間試験実施!

場所: H101、 時間: 1 時 20 分から 2 時 50 分まで、
監督: 今田光彦 (専門 TA) + 野村佑司 (井上代理)

=====

- 1 実数とその性質
- 2 距離空間とその位相
- 3 コンパクト集合
- 4 連結性
- 5 微分、Taylor の定理

5.1 微分 (differential)

5.1.1 多変数関数の高階微分についての新しい記法 (多重添字を用いた偏導関数の記述)

5.1.2 微分 (differential)

5.2 高階微分

命題 5.1 f を \mathbb{R}^n の開集合 U 上での C^k -級 ($k \geq 1$) 実数値関数とする。2 点 $x, x+z$ を結ぶ線分

$$L: g(t) = x + tz, \quad t \in [0, 1]$$

が U に含まれているとき、合成関数 $\varphi = f \circ g$ は $[0, 1]$ 上での C^k -級実数値関数であり、 $1 \leq m \leq k$ に対し

$$\varphi^{(m)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}(x + tz) z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_m} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x + tz) z^\alpha$$

となる。

定義 5.1 (m 次微分 (m -th differential)) $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ が U 上で C^m -級のとき、任意の $x \in U$ に対して

$$(d^m f)_x(z) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) z^\alpha$$

与えられる m 次形式を、 f の x における m 次微分という。 $(d^m f)_x$ を単に $d^m f$ と記す場合もある。 $d^1 f$ を単に df と記す。

m 次形式 : 上で、 m 次形式と言ったが説明を加える必要がある。まず 2 次形式から始める。

定義 5.2 V, W, Z をベクトル空間とする。 $Z^{V \times W}$ の元 T が以下の条件を満たすとき双一次変換 (二重線形写像、2 次形式) という。 $v \in V$ 及び $w \in W$ に対して $T_v(w) = T(v, w)$ 、 $T_w(v) = T(v, w)$ と定めるとき $T_v \in L(W : Z)$ かつ $T_w \in L(V : Z)$ である。 $V \times W$ から Z への 2 次形式全体を $L(V, W : Z)$ で表す。

ここで T_v, T_w を T から引き起こされる線形写像という。

- 典型的な例 : (i) $V = W = \mathbb{R}^n, Z = \mathbb{R}$ に対して $T(x, y) = (x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$).
(ii) $V = W = C([a, b]), Z = \mathbb{R}$ に対して $T(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ ($f, g \in C([a, b])$).

定義 5.3 V_1, V_2, \dots, V_m, Z をベクトル空間とする。 $Z^{V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m}$ の元 T が、 T から引き起こされる線形写像 $T_j(v_j) = T(a_1, \dots, a_{j-1}, v_j, a_{j+1}, \dots, a_m) \in L(V_j : Z)$ を満たすとき多重一次変換 (多重線形写像、この場合は m 次形式) という。 $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m$ から Z への m 次形式全体を $L(V_1, V_2, \dots, V_m : Z)$ で表す。

以下の事実は定義からすぐに従う。

$$L(V_1, V_2, \dots, V_m : Z) = L(V_1, V_2, \dots, V_{m-1} : L(V_m : Z)) = L(V_1, V_2, \dots, V_{m-2} : L(V_{m-1} : L(V_m : Z))) = \dots$$

3 次形式の例として、前に述べた Navier-Stokes 方程式の「非線形項」について述べた :

$$V_1 = V_2 = V_3 = C_{0,\sigma}^\infty(\Omega : \mathbb{R}^3) = \{u(x) = {}^t(u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega : \mathbb{R})^1, \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_k} = 0\},$$

$Z = \mathbb{R}$ として

$$T(u, v, w) = \iint_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_j(x) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} w_k(x) dx \quad \text{但し} \quad u, v, w \in C_0^\infty(\Omega : \mathbb{R}^3).$$

5.3 Taylor の定理、Taylor 展開

前回説明した記法を用いると、より一般に多変数関数の Taylor 展開が次のようになる :

1 変数の場合 $f \in C^N(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ ならば、ある $\theta \in (0, 1)$ があって

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\bar{x})(x - \bar{x})^j + R_N, \quad R_N = \frac{1}{N!} f^{(N)}(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x})^N$$

だった。剰余項の別の評価をしてみよう。部分積分を繰り返して

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(0) + \left[-(x-t)f'(t) \right]_{t=0}^x + \int_0^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(t) dt. \end{aligned}$$

これを剰余項の積分 (Schrömlisch) 表示といい、仲々役に立つ。

多変数の場合 $f \in C^N(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ ならば、

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(\bar{x})(x - \bar{x})^\alpha + R_N$$

¹ここで $u_j \in C^\infty(\Omega : \mathbb{R})$ で $\text{supp } u_j$ が Ω のコンパクト集合の時 $u_j \in C_0^\infty(\Omega : \mathbb{R})$ と書く

となる。ここで

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad (x - \bar{x})^\alpha = (x_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - \bar{x}_n)^{\alpha_n}$$

であり

$$R_N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(\bar{x} + \theta(x - \bar{x})) (x - \bar{x})^\alpha \quad \exists \theta \in (0, 1).$$

或いは

$$R_N = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \right)^{(N)} f(\bar{x} + t(x - \bar{x})) dt$$

高階微分を用いた表現は

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m!} (d^m f)_x(h) + \frac{1}{N!} (d^N f)_{x+\theta h}(h).$$

Taylor 展開について

これらの証明は既に 1 年次にやったので、ここでは証明しない。

6 常微分方程式の解の存在定理

6.1 Picard の逐次近似法

この小節では、以下の常微分方程式の初期値問題を考えよう：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = a. \end{cases} \quad (1)$$

何故このような微分方程式を考えねばならないのか？Newton の運動方程式は、Lagrange 力学と Hamilton 力学では次のようになる。以下では未定義語を用いて書いておくが、分るときが来たら分るので、あまり気にしないで欲しい：Lagrange 力学では

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L(t, \gamma, \dot{\gamma})}{\delta \dot{\gamma}_j} = \frac{\delta L(t, \gamma, \dot{\gamma})}{\delta \gamma_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

なる方程式を、Hamilton 力学では

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_j(t) = H_{\xi_j}(t, x(t), \xi(t)), \\ \frac{d}{dt} \xi_j(t) = -H_{x_j}(t, x(t), \xi(t)) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

なる 方程式を考察すること が質点の運動を数学的に研究することに相当する。

参考書：V.I. Arnold 「古典力学の数学的方法」岩波書店

この意味はもっとも易しい例として、時間に依存する調和振動子をいじると了解し易くなる：

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\gamma}_j^2 - \frac{\omega^2(t)}{2} \sum_{j=1}^n \gamma_j^2, \quad H(x, \xi) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \frac{\omega^2(t)}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2$$

とすると、

$$\frac{d}{dt} m \dot{\gamma}_j = -\omega^2(t) \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

或いは

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_j(t) = \frac{1}{m}\xi_j(t) \\ \frac{d}{dt}\xi_j(t) = -\omega^2(t)x_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

注意：このように一見易しい方程式でも、 $\omega(t)$ が定数の場合以外は「解を書き下す」ことはできないようである。即ち、解があることは分るが、どのようにあるのか、具体的に初等関数等を用いて書き上げることができるか、は分らないことが多い。それにもかかわらず、微分方程式を用いてそれが定める関数の性質を調べることが、微分方程式研究の大きな目的である。

注意：ところで「方程式を考察すること」とは一体何か？

以下の Picard の逐次近似法の概略を述べた。詳細は次回に。

==== 以下は全くのメモとして ====

以下未定義語満載だが、何処かの記憶に留めておけば十分である。

微分作用素の局所性、local property (Peetre's theorem)

A linear mapping of $C^\infty(\Omega)$ into $C^k(\Omega)$ is a differential operator with $C^k(\Omega)$ coefficients if and only if $\text{supp } Pf \subset \text{supp } f$ for every $f \in C_0^k(\Omega)$.

ここで $\text{supp } g$ とは $\overline{\{x \mid g(x) \neq 0\}}$ で関数 g の台 (サポート) と呼んだことは前にも説明した。また、台がコンパクト集合のとき " C_0^k " と書いた。また、力学法則等は「近くのことのみで決まるべき」ということの「暗黙の了解」に数学的な意味を与えたものが局所性といってよいであろう²。

相対論的エネルギー $E^2 = |\xi|^2 + m^2c^4$ を一階化する必要 (「量子化」、³「確率的解釈」に必要とか?) にせまられ、Dirac は $E = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi_i + \beta mc^2$ とおいてみた。これの2乗が $|\xi|^2 + m^2c^4$ となるためには「数」 α_i 、 β は非可換で関係式

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \beta^2 = 1$$

を満たさねばならないことが示された。このような関係式を満たす α_i 、 β の一つの例が、 4×4 -Dirac 行列である。ところで、何故、 $E = \pm \sqrt{|\xi|^2 + m^2c^4}$ と考えないのか? この関係式 $E = \pm \sqrt{|\xi|^2 + m^2c^4}$ を「量子化」と「擬微分作用素」となり局所性は満たされなくなるからである。

質量 m が 0 のときは、同様な考察で $E = \sum_{j=1}^3 \xi_j \sigma_j$ 、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

とすると、 $E^2 = \sum_{j=1}^3 \xi_j^2$ 。これから導かれるものが Weyl 方程式といわれ、数奇な運命³を持った方程式のようである。

H. Lewy は 1957 年に、 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \setminus C^\omega(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ のとき、

$$-i \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2(x_1 + ix_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3)$$

は解を持たないことを示した。 $C^\omega(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ とは解析的な関数のことで、 $C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ 関数で Taylor 展開で定まる冪級数が正の収束半径を持つものである。

物理学者は現象の特徴的な微少量を取り出しその微少時間の変化の関係式をうまく書き上げて綺麗な方程式を導けば「その方程式には解があるに決まっている」と固く信じてきた。例えば、流体の方程式とされ

² とはいえ、物理現象の記述方法がどうあるべきか? 即ち、物理的諸量の微少変化の間の関係はどう表示されるのが順当なのか? 相互関係が局所的とも言えない現象もあるようなので、物理学者に聞かねばならない

³ Nutorino に質量があるかどうか? に関係があるようである

る Navier-Stokes 方程式は、質量保存則と運動量保存則を基に「小川のせせらぎ」を観察して導かれる Ansatz を加えて、導出したものにもかかわらず、相当複雑な現象をも量的にも説明できることが知られている。しかし、この「Lewy の反例」は方程式が書き上げられたとしても、その方程式の解は無いのかもしれないという思いを抱かせるに十分で、強い衝撃を与えた。人によっては衝撃を感じないもので、例えば「何故 Gödel の不完全性定理が西欧文明に極めて強い衝撃を与えたのか」を探ることは面白いのではあるまいか。古典力学で考察される常微分方程式の初期値問題は時間が短いときはともかく解けるが、偏微分方程式はこの例のようにきわめてたわいな見えるものでも、「解を持たない」ということがある。

=====

メモ：このところ特に物理進学希望者の受講者が減ってきている。総勢 35 名程度か？学生諸君の意識や状況の問題だけでなく、講義内容及び講義の仕方共に問題があると思うべきであろう。事態の改善を図るために、実施予定の中間試験と期末試験での学生諸君の建設的な批判に期待する。