解析概論 I　第 2 回講義内容（2005 年 5 月 6 日）井上淳

1　実数とその性質

1.1　実数の公理

1.2　極限概念の拡張

1.2.1　数列の極限

1.2.2　『この数列は収束しない』をどう示すのか？

1.2.3　上極限と下極限

1.2.4　Toeplitz の極限値定理

この小節では時間の関係で述べられないであろう、少々特殊な極限定理を述べよう。

定理 1.1　（三角行列とみなせる）配列

$$(p_{n\nu}) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

が以下の 2 条件を満たすとする：
(i) 各列は零列、即ち、各 ν を固定するとき、$p_{n\nu} \to 0\ (n \to \infty)$ である。
(ii) 各行の絶対値の和が一様に有界、即ち、一つの正数 M が存在して各 n に対し、$\sum_{\nu=1}^{n} |p_{n\nu}| \leq M$ である。

このとき、もし $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ ならば、同時に

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{n\nu} a_\nu \to 0\ (n \to \infty). \tag{2}$$

証明：仮定より任意の $\epsilon > 0$ に対し $|a_n| < \epsilon/(2M)\ (n > \exists N)$。故に (ii) より

$$|\sum_{\nu=1}^{n} p_{n\nu} a_\nu| < |\sum_{\nu=1}^{N} p_{n\nu} a_\nu| + \frac{\epsilon}{2}$$

右辺の第 1 項は (i) より $n > \exists N' > N$ のとき $\epsilon/2$ より小さくなる。故に(2) が成立つ。　□

定理 1.2 (1) の配列 $(p_{n\nu})$ が前定理の条件 (i) と (ii) の他に、条件

(iii)　$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{n\nu} \to 1\ (n \to \infty)$$

を満たすとする。$a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ ならば、

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{n\nu} a_\nu \to \alpha\ (n \to \infty). \tag{3}$$

但し、$\alpha = \pm\infty$ のときは $p_{n\nu} \geq 0$ とする。

注意：$p_{n\nu}=1/n$ とおくと、Cauchy の定理『$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^n a_k=\alpha$』が従う。

証明：

$$\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}a_\nu=\alpha\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}+\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}(a_\nu-\alpha)\quad(\alpha\neq\pm\infty).$$

$n\to\infty$ のとき、右辺第 1 項は (iii) により α に収束し、第 2 項は前定理により 0 に収束する。

$\alpha=+\infty$ のときは、任意の $K>0$ に対して $a_n>2K(n>\exists N)$ となる。(i) と (iii) より $\sum_{\nu=N}^n p_{n\nu}\to 1(n\to\infty)$ となるから、

$$\sum_{\nu=N+1}^n p_{n\nu}>\frac{2}{3}\quad(n>\exists N').$$

(i) によって $\exists N''>N'$ をとれば

$$\sum_{\nu=1}^N p_{n\nu}a_\nu>-\frac{K}{3}\quad(n>N'')$$

故に、$n>N''$ ならば

$$\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}a_\nu=\sum_{\nu=1}^N p_{n\nu}a_\nu+\sum_{\nu=N+1}^n p_{n\nu}a_\nu>-\frac{K}{3}+\frac{2}{3}2K=K.$$

従って(3) は $\alpha=+\infty$ の場合も成立つ。$\alpha=-\infty$ の場合は $\{-a_n\}$ とすれば良い。 □

定理 1.3 (1) の配列 $(p_{n\nu})$ が前定理の条件 (i), (ii) と (iii) の他に、条件
(iv) 各 $k(1\le k\le n)$ に対して $p_{n,n-k}\to 0\ (n\to\infty)$
を満たすとする。

このとき、数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ について、有限な極限 $a_n\to\alpha$、$b_n\to\beta(n\to\infty)$ を持つとき

$$\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}a_\nu b_{n-\nu}\to\alpha\beta\ (n\to\infty)\tag{4}$$

注意：$p_{n\nu}=1/n$ とおくと、Cesaro の定理『$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{k=1}^n a_k b_{n-k}=\alpha\beta$』が従う。

証明：(4) の左辺を

$$\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}a_\nu b_\nu=\alpha\sum_{\nu=1}^n p_{n,n-\nu}+\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}b_{n-\nu}(a_\nu-\alpha)$$

と書き換える。仮定より $\{b_n\}$ は有界だから、$\{p_{n\nu}\}$ と同時に $\{p_{n\nu}b_{n-\nu}\}$ もまた条件 (i), (ii) を満たす。故に、仮定から定理 1.1 により、上式第 2 項は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する。更に、条件 (iv) より条件 (i) は $\{p'_{n\nu}\}\equiv\{p_{n,n-\nu}\}$ に対しても成立つ。条件 (ii) と (iii) は $\{p_{n\nu}\}$ と同時に $\{p'_{n\nu}\}$ に対しても満たされる。故に定理 1.2 により、右辺第 1 項は $n\to\infty$ のとき $\alpha\beta$ に収束する。 □

定理 1.4 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が与えられ、$b_n>0$ かつ $\sum_{j=1}^n b_j\to\infty\ (n\to\infty)$ とする。もし $a_n/b_n\to\alpha\ (n\to\infty)$ となるならば（$\alpha=\pm\infty$ でもよい）

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n b_j}\to\alpha\ (n\to\infty).$$

証明：定理 1.2 において $p_{n\nu}=b_\nu/\sum_{\nu=1}^n b_\nu\ (1\le\nu\le n=1,2,\cdots)$ とおけばよい。 □

系 1.1 (Kronecker) $\{p_n\}$ を無限大に発散する正の数列ならば、任意の収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (= s)$ に対し

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu c_\nu}{p_n} = 0.$$

証明：$s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j$ とおくと仮定より $s_n \to s$ となる。$b_j = p_j - p_{j-1}(j = 2, 3, \cdots)$、$a_n = s_n b_n$ とおくと定理 1.4 が適用できて

$$\frac{\sum_{j=2}^{n}(p_j - p_{j-1})s_{j-1}}{\sum_{j=2}^{n}(p_j - p_{j-1})} \to s\ (n \to \infty).$$

$p_1/p_n \to 0$ なる仮定より

$$\frac{1}{p_n}\sum_{j=2}^{n} p_j c_j = s_n - \frac{1}{p_n}\sum_{j=2}^{n}(p_j - p_{j-1})s_{j-1} \to 0\ (n \to \infty). \qquad \square$$

定理 1.5 2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が与えられ、$\{b_n\}$ が有界でない狭義の単調列であるとする。このとき、$n \to \infty$ に対して $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1}) \to \alpha$ ならば、同時に $a_n/b_n \to \alpha$ となる。

証明：数列 $\{b_n\}$ は増加と仮定して一般性を失わない。便宜上 $a_0 = 0, b_0 = b_1 - 1$ とおき、$\alpha_n = a_n - a_{n-1}$, $\beta_n = b_n - b_{n-1}$ と定義する。$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ に対して定理 1.5 を用いよ。 $\square$

1.2.5 級数の収束、発散について補足

定義 1.1 (級数) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき、形式的な和 $a_1 + a_2 + \cdots$ を（無限）級数という。$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ を級数の第 m 部分和といい、新しい数列 $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ ができたと考えてよい。もし、この数列の極限が存在すれば、この級数は収束するといい、その極限値 $S = \lim_{m\to\infty} S_m$ を $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で表す。

定理 1.6 (Cauchy の冪根判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対して

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1 \tag{5}$$

ならば、この級数は収束する。

証明：この条件(5) は、殆ど全ての n について $\sqrt[n]{a_n} \le \alpha < 1$、即ち、$a_n \le \alpha^n$ なる正数 $\alpha < 1$ が存在することと同値である。 $\square$

定理 1.7 (d'Alembert の比判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対して

$$\begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Longrightarrow \text{この級数は収束}, \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Longrightarrow \text{この級数は発散する。} \end{cases} \tag{6}$$

証明：殆ど全ての n について $a_{n+1}/a_n \le \alpha < 1$、即ち、$a_{n+1}/a_n \le \alpha^{n+1}/\alpha^n$ なる正数 $\alpha < 1$ があることより、正項級数 $\sum a_n$ は収束する。ある $\beta > 1$ があって、殆ど全ての n について $a_{n+1}/a_n \ge \beta > 1$ ならば、この級数は発散する。 $\square$

注意：定理 1.7 より、冪根判定法 5 の方が比判定法 6 より有力ではあるが、後者の方が簡便である。

定理 1.8 (Kummer の判定法) 一つの正項数列 $\{b_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}\right) > 0 \Longrightarrow \text{正項級数} \sum a_n \text{は収束する} \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n} = +\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}\right) < 0 \Longrightarrow \sum a_n \text{は発散する} \tag{8}$$

証明：(7) より、ある $K > 0$ をとれば、$n \geq m = m(K)$ に対して $(a_n/a_{n+1})b_n - b_{n+1} > 1/K$、即ち、$a_{n+1} < K(a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1})$。従って、任意の $\ell > m$ に対して

$$\sum_{n=m+1}^{\ell} a_n < K(a_mb_m - a_\ell b_\ell) < Ka_mb_m.$$

これは、$\sum a_n$ の部分和の列が有界なることを意味する。故に、正項級数 $\sum a_n$ は収束する。

(8) が成立つならば、$n \geq m$ のとき、$a_nb_n < a_{n+1}b_{n+1}$、従って $a_n \geq a_mb_m/b_n$。故に、$\sum a_n$ は発散する。
□

定理 1.9 (Raabe の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ は、

(i) $\underline{\lim}_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) > 1$ ならば収束するが、

(ii) $\overline{\lim}_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) < 1$ ならば発散する。

証明：定理 1.8 において $b_n = n$ととればよい。 □

1.2.6 上極限集合と下極限集合

定義 1.2 $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ とするとき、

$$\begin{aligned}
A^* &= \{x \in X : \text{無限に多くの } n \text{ に対して } x \in A_n \text{ となる}\},\\
&= \{x \in X : x \textit{ belongs to } A_n \textit{ for infinitely many values of } n\},\\
A_* &= \{x \in X : \text{有限個の } n \text{ を除いて } x \in A_n \text{ となる}\},\\
&= \{x \in X : x \textit{ belongs to } A_n \textit{ for all but finite number of values of } n\}
\end{aligned}$$

と定義し、$A^* = \overline{\lim}\, A_n$、$A_* = \underline{\lim}\, A_n$ と表記する。

特に $A^* = A_*$ となるとき、この（極限）集合を $\lim_n A_n$ と記す。

$\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ とするとき、以下の性質を持つ：

(1) n が偶数か奇数かによって $A_n = B$ 或いは C となるとき、

$$\underline{\lim}\, A_n = B \cap C, \quad \overline{\lim}\, A_n = B \cup C.$$

(2) $A_* = \underline{\lim}\, A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m \subset \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m = A^*$.

(3) $\{A_n\}$ が互いに疎な集合ならば、$\lim_n A_n = \emptyset$.

(4) $A_* = \underline{\lim}\, A_n$、$A^* = \overline{\lim}\, A_n$ 及び任意の $F \subset X$ に対して

$$F - A_* = \overline{\lim}\,(F - A_n), \quad F - A^* = \underline{\lim}\,(F - A_n).$$

(5) $A_* = \underline{\lim} A_n$、$A^* = \overline{\lim} A_n$ に対して

$$\chi_{A_*}(x) = \underline{\lim}\, \chi_{A_n}(x), \quad \chi_{A^*}(x) = \overline{\lim}\, \chi_{A_n}(x).$$

2 距離空間とその位相

2.1 距離空間の定義と性質

既に実数の連続性の定義や、極限の定義の中に「距離」の概念が使われている。その意味では少々同義語反復的になるが、以下の定義をする。

定義 2.1 集合 X をとる。集合 $X \times X$ 上に定義された関数 $d(\cdot, \cdot)$ が次の性質を満たす時、d を距離といい、(X, d) を距離空間という; 任意の $x, y, z \in X$ に対して

(1) $d(x,y) \geq 0$ かつ $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

例 1： $X = \mathbb{R}^n$ 上で定めた

$$d_p(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \max_{j=1,\cdots,n} |x_j - y_j| & (p = \infty) \end{cases}$$

によって、$\mathbb{R}^n$ は距離空間を為す[1]。これらが距離関数になることの証明は必ずしも易しくはないかもしれない。しかし、$d_2(x,y)$ は Euclid 距離、即ち我々が日常的に用いている距離になっているので、証明しよう。工夫として、まず内積といわれる関数を

$$(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

と定義すると、これは以下の性質を持つ：
(i) $(x,x) \geq 0$、更に $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(ii) $(x,y) = (y,x)$.
(iii) $|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$ (Schwarz's inequality).

(i), (ii) は明らかであろう。(iii), 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x,x) + \lambda(x,y) + \lambda(y,x) + \lambda^2(y,y) = (x,x) + 2\lambda(x,y) + \lambda^2(y,y)$$

に注意する。もし $(y,y) = 0$ ならば (i) より $y = 0$ だから、(iii) は両辺 0 として成立している。上式は $(y,y) > 0$ ならば、λ に関しての 2 次式だから、それが λ によらずがいつでも非負とは、判別式 $(x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$ ということ。だから (iii) が成立する。

さて $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ とおくと、$d_2(x,y) = \|x - y\|$ である。故に、$d_2(x,y)$ に関する 3 角不等式は

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

[1] $\lim_{p \to \infty} d_p(x,y) = \max_{j=1,\cdots,n} |x_j - y_j|$ を示せ

と同等である[2]。これを以下に示す。

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 = \|(x-z)+(z-y)\|^2 &= (x-z,x-z)+(x-z,z-y)+(z-y,x-z)+(z-y,z-y)\\ &\le \|x-z\|^2+2|(x-z,z-y)|+\|z-y\|^2\\ &\le \|x-z\|^2+2\|x-z\|\|z-y\|+\|z-y\|^2 = (\|x-z\|+\|z-y\|)^2.\end{aligned}$$

注意：Schwarz's inequality で等号が成り立つのは $x, y \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ のベクトルとして一次従属なることである。

演習問題：以下の Cauchy's inequality を数学的帰納法を用いて示せ。

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_j b_j\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^n a_j^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_j^2\Big)$$

等号は n 個の関係式 $\lambda a_j + \mu b_j = 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ を同時に満たすような、少なくとも一方は 0 でない 2 数 λ, μ が存在する時に限る。

注意：上の 3 角不等式の証明では、考えている空間 $\mathbb{R}^n$ の次元 n はどこにも表れていない。近々、物理の講義で学ぶであろう量子力学の基礎は Hilbert 空間で与えられ、それの典型例として、$\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ の $n \to \infty$ なるものとしての ℓ^2 がある。この空間 ℓ^2 で "線形代数" を考えると行列の無限次元版である Heisenberg の行列力学がでると考えられる[3]。

定義 2.2 $\mathbb{R}^n$ 内の点列 $x^{(\ell)} = {}^t(x_1^{(\ell)}, x_2^{(\ell)}, \cdots, x_n^{(\ell)})$ が $\ell \to \infty$ のとき $y = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に近づくとは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある数 N があって $\ell > N$ ならば $d(x^{(\ell)}, y) < \epsilon$ となることをいう。

例 2：任意の集合 X 及び $x, y \in X$ に対して

$$d(x,y) = 1 - \delta_{xy}, \quad \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると、X の距離となる。これを X の離散距離という。

例 3：$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ 上で $z, w \in D$ に対し

$$d(z,w) = \begin{cases} |z-w| & \text{if } \arg(z) = \arg(w) \text{ 或いは } z \text{ か } w \text{ のどちらかが } 0, \\ |z| + |w| & \text{if otherwise} \end{cases}$$

と定義すると、(D, d) は距離空間になる。

例 4：$X = C[0,1]$ は $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ で距離空間を為す。但し、$f \in C[0,1]$ に対して

$$\|f\|_p = \begin{cases} \big(\int_0^1 |f(x)|^p dx\big)^{1/p} & (1 \le p < \infty), \\ \max_{x\in[0,1]} |f(x)| & (p = \infty). \end{cases}$$

注意 1：関数族 $\{x^n\}_{n=0,1,\cdots} \subset C[0,1]$ であり、それらは 1 次独立。線形空間 $C[0,1]$ は有限次元ではない！

＝＝＝＝以下の例は、ゆとりがある人のみ考察すれば良い＝＝＝＝

[2] この形は絶対値の関係式と同じだ！そこで $|\cdot|$ の代わりに $\|\cdot\|$ なる記号を用いた

[3] ここではこれ以上の説明はできないこととする。こんなことを言ったのは、君たちの知的好奇心を刺激したつもり！量子力学の勃興期の熱気は、朝永振一郎「量子力学 I」（みすず書房）に詳しいし、そこには水素原子のスペクトル線が色々出てくる。また Feynman の書いた教科書のみならず幾つかのエッセイ「ファインマンさん、ご冗談でしょ」等も面白い

例 5 [Lobatchevski 距離]：$\mathbb{R}^2$ の中に一つの円を描き、その内部全体を S とする。ここの 2 点 A、B の間に以下のように距離を入れる：A、B を結ぶ直線の円周との交点を Q、P とし

$$d(A,B)=\log\,(ABPQ),\quad (ABPQ)=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\Big/\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\cdot\frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}}.$$

ここで $\overline{AP}$ は A から P への有向線分の長さとする。このとき $(ABPQ)>0$ であり $(ABPQ)=(ABQP)^{-1}$ なることが示せるので、上の距離 $d(A,B)$ は Q、P の取り方によらず well-defined である。

例 6 [p 進距離]：p を素数とし $\mathbb{Q}$ に

$$d(a,b)=\begin{cases}0, & a=b\text{ のとき},\\ p^{-m}, & a\neq b\text{ であり、}a-b=p^m s/r\text{ のとき}\end{cases}$$

(ここに、r、s は p で割り切れない整数、m は正、負の整数または 0) として、距離を入れることができる。

例 7 [有理関数全体]：ある体 K の元を係数とする 1 変数 X の有理関数全体を S とし、1 より大きな素数 p を任意に一つとる。S の 2 つの要素 a、b に対し

$$d(a,b)=\begin{cases}0, & a=b\text{ のとき},\\ p^{-m}, & a\neq b\text{ であり、}a-b=X^m g(X)/f(X)\text{ のとき}\end{cases}$$

(ここに $f(X)$、$g(X)$ は 0 でない定数項を持つ多項式、m は正、負の整数または 0) として、距離を入れることができる。

例 8 [自然数の無限数列全体]：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}=\{(a_k)_{k=1}^{\infty}\mid a_k\in\mathbb{N}\}$ とし $\mathbf{a}=(a_k),\mathbf{b}=(b_k)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{cases}0, & \mathbf{a}=\mathbf{b}\text{ のとき},\\ \frac{1}{n}, & a_j=b_j\ (j=1,\cdots,n-1)\text{ かつ }a_n\neq b_n\text{ のとき}\end{cases}$$

と定義すると、$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}},d)$ は距離空間になる。この空間の元に対し連分数 (continued fraction)

$$\mathbf{a}=(a_k)\longrightarrow\phi(\mathbf{a})=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

を対応させて $(0,1)$ の中の無理数と 1:1 対応がつく。

注意：例 6,7,8 は三角不等式より強く

$$d(a,c)\leq\max\{d(a,b),d(b,c)\}$$

なる性質を持つ。この性質を持つ距離を持った距離空間では、幾分奇妙に見えることが起こる：例えば、「任意の開球 $U_\epsilon(a)=\{x\mid d(x,a)<\epsilon\}$ は閉集合である」し、「任意の $b\in U_\epsilon(a)$ に対し $U_\epsilon(a)=U_\epsilon(b)$ である」等。

例 9 [Cantor 空間と Cantor 距離][4]：有限なアルファベットの系の可算直積に距離を入れることを考える[5]。2 成分の場合だと，$\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ として，

$$d_C(\sigma,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_n-\tau_n|}{2^n},\quad \sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots),\,\tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots)\in\Omega$$

[4]以下の知識供与は吉川敦氏による

[5]概説は，Weihrauch,K: Computable analysis, Springer 2000

によって，Cantor 距離を定義すると、これは $\{0,1\}$ の離散位相の直積位相と同相の位相を定める。この (Ω, d_C) を Cantor 空間と言う。

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega; \omega \text{ has infinitely many zero components}\}$$

とし、１対１写像 $\mu : [0,1) \to \Omega_0$ により、$[0,1)$ に Fine[6]距離

$$d_F(x,y) = d_C(\mu(x), \mu(y)), \quad x,\, y \in [0,1)$$

を入れる。$[0,1)$ は d_F に関して、可分、全有界[7]となるが、完備ではない。

＝＝＝＝ここまでが、余裕人用＝＝＝＝

メモ：この時間は本来は演習の時間であり、物理学科の諸君は専門の授業があって出席できなかった。数学科の学生 30 名程が出席。しかし、続けての講義は老人にはなかなか辛い。

[6]Fine の仕事; Trans.A.M.S. 65(1949) pp.372-414，69(1950) pp.66-77、最近、Walsh 解析などの関係で注目されている

[7]可分、全有界の定義はもう少し後でする