

## 解析概論 I 上極限、下極限に関する追補 (2005年7月22日) 井上淳

第1回講義での上極限、下極限についての理解を助ける為に、そのときは省略した証明等を与える。 $\epsilon-N$ 論法をもう一度確定する為である。

**定義 0.1** (拡大実数) 実数の全体に無限遠点  $\{\pm\infty\}$  を付加したものを拡大実数 (*extended real number*) 或いは補完数直線と言い  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  と書く。

**定義 0.2** 任意の実数列  $\{a_n\}$  に対し  $l_n = \sup_{m \geq n} a_m$  とおくと、これは単調減少列だから  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$  が存在する。これを数列  $\{a_n\}$  の上極限といい  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  或いは  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  と記述する。

**定義 0.3** 実数列  $\{a_n\}$  の部分列の極限となる点  $x \in \bar{\mathbb{R}}$  を、数列  $\{a_n\}$  の集積値という。

**定理 0.1** 実数列  $\{a_n\}$  と  $l \in \bar{\mathbb{R}}$  に対し、以下は同値である：

- (a)  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n, l_n = \sup_{m \geq n} a_m$ .
- (b) (i)  $l < x$  となる任意の  $x \in \bar{\mathbb{R}}$  をとると、十分大きなすべての  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $a_n < x$  となる。  
(ii)  $y < l$  となる任意の  $y \in \bar{\mathbb{R}}$  に対し、 $y < a_n$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は無限に存在する。
- (c)  $l$  に収束する  $\{a_n\}$  の部分列が存在する。 $l < x$  となる  $x$  に収束する  $\{a_n\}$  の部分列は存在しない。
- (d)  $l$  は数列  $\{a_n\}$  の  $\bar{\mathbb{R}}$  における集積値の中で最大なものである。

注意：以下の証明で、分かりにくいと思う人は  $-\infty < l < \infty$  として読み返してみよ。もし  $l = \infty$  ならば、「 $l < x$  とする」 $x$  は存在しないから、ここの条件は「空」と同等になる。

証明：(い) (a)  $\implies$  (b)(i) :  $l < x$  とすると、 $l$  の定義から  $l_{n_0} < x$  となる  $n_0 \in \mathbb{N}$  があって、すべての  $n \geq n_0$  に対して  $a_n \leq l_{n_0} < x$  である。

(a)  $\implies$  (b)(ii) :  $y < l$  ならば、すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $y < l \leq l_n$  であるから、 $y < a_{m_0} \leq l_n$  となる数  $m_0 \geq n$  が存在する。 $n$  は任意だったから  $y < a_m$  となる  $m \in \mathbb{N}$  が無限にあることになる。

(b)  $\implies$  (a) :  $l' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  とし、これが (b) で定まる  $l$  と等しいことを示す。

仮定 (b)(i) より、 $l < x$  となる任意の  $x \in \bar{\mathbb{R}}$  に対し  $n_0 \in \mathbb{N}$  があって、 $n \geq n_0$  に対して  $a_n \leq l_{n_0} \leq x$  となる。故に  $n \geq n_0$  ならば  $l_n \leq x$  となるから  $l' \leq l_{n_0} \leq x$  である。 $x$  は  $l < x$  となる任意の元であるから  $l' \leq l$  となる (実際、もし  $l > l'$  ならば  $l < x < l'$  となる  $x$  があるから、今示したことに矛盾する)。

次に、 $y < l$  となる任意の  $y \in \bar{\mathbb{R}}$  をとると、(b)(ii) より、 $y < a_n \leq l_n$  となる  $n \in \mathbb{N}$  が無限に存在するから、 $y \leq l'$  となる。実際、もし  $y > l'$  ならば (a)  $\implies$  (b)(i) により有限個の  $n$  を除き  $y > a_n$  となり、上記に矛盾する。 $y$  は  $y < l$  となる任意の元だから、 $l \leq l'$  となる (もし、 $l > l'$  ならば  $l > y > l'$  なる  $y$  をとると矛盾を生じる)。

(ろ) (b)  $\implies$  (c) : (b) を満たす  $l$  が  $+\infty$  ならば、(ii) により  $l = +\infty$  に収束する部分列がある。このとき  $l < x$  なる  $x \in \bar{\mathbb{R}}$  は存在しないから (c) の後半部分は考えなくて良い。もし  $l$  が  $-\infty$  ならば、(i) により

$-\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  である。従って、このとき  $l < x$  となる  $x$  に収束する部分列は存在しない。(b) を満たす  $l$  が実数ならば、任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $x = l + \epsilon, y = l - \epsilon$  とおくと (b) より  $a_n \in U(l, \epsilon)$  となる  $n \in \mathbb{N}$  が無限に存在する。従って  $l$  に収束する部分列が存在する。このとき  $l < x$  となる任意の  $x$  をとるとき、 $l < x' < x$  となる  $x' \in \mathbb{R}$  がある。(i) により  $x' \leq a_n$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は有限個しかないから、 $x$  は数列  $\{a_n\}$  の部分列の極限にはなり得ない。

(c)  $\implies$  (b) : (c) を満たす  $\mathbb{R}$  の元を  $l$  とする。(i) :  $l < x$  となる  $x \in \mathbb{R}$  に対し  $x \leq a_n$  となる  $n \in \mathbb{N}$  が無限にあれば、そのような  $a_n$  の作る部分列が更に収束する部分列を含む。その極限  $\alpha$  は  $\alpha \geq x > l$  であるから、これは (c) に反する。故に (b)(i) が成立する。(ii) :  $y < l$  なる  $y$  をとる。 $l$  の近傍  $U$  を  $U \subset (y, \infty]$  なるようにとると、 $l$  に収束する部分列があるのだから、 $a_n \in U$  従って  $y < a_n$  なる  $n$  が無数に存在する。

(は) (c)  $\iff$  (d) : 「 $l$  は集合  $\{a_n\}$  の集積点である」 実際、 $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$  とし  $l_n = \sup A_n$  とおくと  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$  であるから、任意の  $\epsilon > 0$  に対し、ある数  $n_0$  があって、 $k \geq n_0$  なる限り  $l - \epsilon < l_k < l + \epsilon$  が成り立つ。一方、 $l_n = \sup A_n$  だから  $l_k - \epsilon < a_{n_k} < l$  なる  $a_{n_k}$  が存在する。これより  $l - 2\epsilon < a_{n_k} < l$  となるから、 $l$  は部分列  $\{a_{n_k}\}$  の極限であることを示している。

「 $l$  が最大の集積点ということ」 実際、 $l'$  を別の集積点の一つとし、 $l'$  に収束する部分列を  $\{a_{n_k}\}$  とすると、 $l_{n_k} = \sup_{n \geq n_k} a_n \geq a_{n_k}$  は明らかであろう。故に、 $l' = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} l_{n_k} = l$ 。  $\square$

演習問題 0.1 数列  $\{a_n\}$  が収束する  $\iff \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ .

解答例 : (a)  $\implies$  (b)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $l$  に収束するならば、その任意の部分列も  $l$  に収束する。故に、上の定理 0.1(c) より  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  であり、同様に  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  であるから、 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  が成立する。

(b)  $\implies$  (a) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$ 、 $m_n = \inf A_n$ 、 $l_n = \sup A_n$  とする。このとき  $m_n \leq a_n \leq l_n$  である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  が存在し一致すると、 $\mathbb{R}$  内でも「はさみうちの原理」が成立するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  も存在し、その値は  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  と一致する。  
 $\square$

注意 : はさみうちの原理とは何だったか思い出し、証明してみよ。

命題 0.1 数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 、 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $a_n \leq b_n$  を満たし、共に  $\alpha$  に収束するとする。数列  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  があって任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $a_n \leq c_n \leq b_n$  とするならば、 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  も  $\alpha$  に収束する。

演習問題 0.2 次の不等式を示し、等号が成立しない例を挙げよ。

$$(i) \overline{\lim} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n, \quad (ii) \underline{\lim} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n,$$

$$(iii) a_n > 0, b_n > 0 \implies \overline{\lim} (a_n \cdot b_n) \leq \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n,$$

$$(iv) a_n > 0, b_n > 0 \implies \underline{\lim} (a_n \cdot b_n) \geq \underline{\lim} a_n \cdot \underline{\lim} b_n,$$

解答例一部 : (i) で等号が成立しない例、 $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 、 $b_n = -a_n$  とすると  $\overline{\lim} a_n = 1$ 、 $\overline{\lim} b_n = 1$  であり、 $a_n + b_n = 0$  だから  $\overline{\lim} (a_n + b_n) = 0 < 2 = \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ .

(iii) で等号が成立しない例、 $a_{2n} = 1$ 、 $a_{2n-1} = 2$ 、 $b_{2n} = 2$ 、 $b_{2n-1} = 1$  とすると  $\overline{\lim} a_n = \overline{\lim} b_n = 2$  であり、 $a_n \cdot b_n = 2$  だから  $\overline{\lim} (a_n \cdot b_n) = 2 < 4 = \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n$ .

注意 : 演習 0.2 で

$$(iii) a_n > 0, b_n > 0 \implies \overline{\lim} (a_n \cdot b_n) \leq \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n$$

を示せと書いたが、 $a_n = 1/n$  かつ  $b_n = n^2$  とすると  $\overline{\lim}(a_n \cdot b_n) = \overline{\lim} n = \infty$  となるが  $\overline{\lim} 1/n = 0$  かつ  $\overline{\lim} n^2 = \infty$  であり  $\infty \leq 0 \cdot \infty$  とはどういうことだろうか？この問題は、「但し書き」が必要で、「数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  で  $0 \cdot \infty, \infty \cdot 0$  となるものは除いて」とする必要がある！

定理 0.2 任意の正数列  $\{a_n\}$  に対して

$$\underline{\lim} \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

演習問題 0.3 定理 0.2 の証明を与えよ。

解答例： $\overline{\lim} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \bar{\alpha} < \infty$  とする。任意の  $\epsilon > 0$  に対してある数  $n_0$  があって、 $n \geq n_0$  ならば  $\frac{a_n}{a_{n-1}} < \bar{\alpha} + \epsilon$  となる。即ち、 $a_n < (\bar{\alpha} + \epsilon)a_{n-1}$  で、これを繰り返すと  $a_n < (\bar{\alpha} + \epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$  となる。故に、

$$\sqrt[n]{a_n} < (\bar{\alpha} + \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\bar{\alpha} + \epsilon)^{n_0}}} \text{ となるから、} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\bar{\alpha} + \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\bar{\alpha} + \epsilon)^{n_0}}} = \bar{\alpha} + \epsilon$$

となる。ここで  $\epsilon > 0$  は任意だったから  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_n}{a_{n-1}}$  が示された。また、 $\overline{\lim} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \bar{\alpha} = \infty$  とすると明らかに最後の不等式は成立する。他も同様。  $\square$