解析概論 I　第１回講義内容（2005 年 5 月 6 日）　井上淳

これは、4 月 15 日講義予定分であったが、井上に急用ができたので、15 日は演習に振り替えた。ところが、22 日に繰り越すつもりで、朝家を出るところで不注意からチェーンに足をとられ激しく転倒し病院へ直行する羽目になった。そこで、5 月 6 日に演習時間も込めて 2 コマ分（15 日、22 日）講義をし、また別の日に補講をする予定である。

数学科学生向け数学相談室開室：H137 講義室で月、火、金曜日の 4:40 から 6:10 まで

1　実数とその性質

この節の最初の 2 つの内容は講義ノートには書いておくが、講義ではあまり言及しない事柄である。もう耳にたこができているだろうから！たこが好きな人は良く読んでみよう。

1.1　実数の公理

１年次の微積分と同様に、実数を自然数論から構成すること無しに、実数を以下の公理を満たす『あるもの』として『認識する』ことにする[1]。

実数の公理群 I（四則演算）　『実数は体を成す』２つの演算 $+$（加法）と $\times$（乗法）が定義され

(1) 結合律： $a, b, c \in \mathbb{R}$ が何であっても、$a + (b + c) = (a + b) + c,\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$

(2) 可換律： $a, b, c \in \mathbb{R}$ が何であっても、$a + b = b + a,\ a \times b = b \times a.$

(3) 単位元の存在：$0, 1 \in \mathbb{R}$ という特別な元が存在し、a が何であっても、$a + 0 = a,\ a \times 1 = a.$

(4) 逆元の存在： $a \in \mathbb{R}$ が何であっても、$a + b = 0$ を満たす b が存在する。この元を $-a$ で表す。$a \neq 0$ なら $a \times b = 1$ なる b が存在する。この元を $1/a = a^{-1}$ で表す。

(5) 分配律：$a, b, c \in \mathbb{R}$ が何であっても、$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$

注意：以降混乱が起こらない限り、$a \times b$ を ab と記す。

◎ **順序の公理**：不等号 $\leq$[2]は次の関係を満たすものとして定義する。

(1) 反射律： $a \leq a$

(2) 反対称律： $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$

(3) 推移律： $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$

[1] コンピュータやソフトの性能や効率が上がるにつれ、一体我々は何をどのように認識しているかを機械上に表現できるかが大いなる問題になる。このとき、数学的認識が歴史的にどのような変化をしてきたかは役立つこともあろう。自然数論、有理数論、無理数論と準備し Dedekind の切断と Cauchy の完備化との関連を調べることは、興味を持った諸君に任せる

[2] $a \leq b$ とも $b \geq a$ とも書く

実数の公理群 II　『演算と両立する全順序が存在する』任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$a \leq b$ または $a \geq b$ のいずれか一つが必ず成立し、

(1) $a \leq b$ なら、c が何でも $a + c \leq b + c$ となる。

(2) $a \leq b$ で $c \geq 0$ なら $a \times c \leq b \times c$ となる。

定義 1.1 $\mathbb{R}$ の部分集合 A が有界であるとは、ある数 M があって、任意の元 $a \in A$ は $a \leq M$ を満たすことである。このような M を A の上界という。α が A の上限であるとは、

(i) α は A の上界の一つであり、

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $b \in A$ があって $a - \epsilon < b$ となる[3]ことである。

実数の公理群 III（連続性の公理）　『上に有界な実数内の集合はその上限を実数の元としてもつ』

1.2　極限概念の拡張

1.2.1　数列の極限

定義 1.2 $\{a_n\}$ が数列であるとは、各 $n \in \mathbb{N}$ に対しある値 a_n が割り振ってあること、別の言い方では、自然数全体 $\mathbb{N}$ から実数 $\mathbb{R}$ への関数 ϕ があるということで、特に $\phi(n)$ を a_n と書いたもので、それを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と記したものである。

定義 1.3 ($\epsilon - N$-論法) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束する。
$\iff$ 任意の ϵ に対して、ある数 N があって、$n \geq N$ なるどんな n に対しても $|a_n - \alpha| \leq \epsilon$ となる。
$\iff$ $(\forall \epsilon)(\exists N)(\forall n \geq N \implies |a_n - \alpha| \leq \epsilon)$
$\iff$ （記法）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty}(a_n - \alpha) = 0$、$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$、或いは $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$.

定理 1.1 上に有界な単調増加数列は極限を持つ。

系 1.1 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は極限を持ち、それを e と記す。

演習問題 1.1 (アルキメデスの原理) 「任意の 2 つの実数 $a > 0,\ b > 0$ に対して、$na > b$ となる自然数 n が存在する」ことを背理法と実数の連続性を用いて示せ。

また、定理 1.1 の系として

演習問題 1.2 (区間縮小法) *(i)* 有界閉区間列 $\{I_n\}_n$ が単調減少、即ち、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $I_n \supset I_{n+1}$ ならば $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$。

(ii) 特に、$I_n = [a_n, b_n]$ とするとき $\lim(b_n - a_n) = 0$ ならば、共通点を一点持つ：$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$。

定義 1.4 (部分列) 自然数の値をとる数列 $\{n(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$（これを $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ とも書く）が狭義単調増加のとき、数列 $\{a_{n(k)}\}$（これを $\{a_{n_k}\}$ とも書く）を数列 $\{a_n\}$ の部分列という。

[3] 雑に言うと「上界のうちで最も小さいもの」

すなわち、数列とは、自然数全体を定義域とし値域を実数とする関数である。ある数列の部分列とは、与えられた数列の定義域を自然数の一部に制限したものである。$\{a_n\}$ に対し $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ とし、部分列を $\{a_{n'}\}$ 等とも表記する。

定義 1.5 (Cauchy 列) 数列 $\{a_n\}$ が *Cauchy* 列であるとは、

任意の ϵ に対して、ある数 N があって、$m, n \geq N$ なるどんな m, n に対しても $|a_n - a_m| \leq \epsilon$ となることである。

$\iff (\forall\epsilon)(\exists N)(\forall m)(\forall n)(m, n \geq N \implies |a_n - a_m| \leq \epsilon)$

注意：上記の最後の式を $(\forall\epsilon)(\exists N)(\forall m, n \geq N \implies |a_n - a_m| \leq \epsilon)$ と書くと、これの否定式を書くとき、妙なことになる。$(\exists\epsilon)(\forall N)(\exists m, n \geq N \quad \text{かつ} \quad |a_n - a_m| > \epsilon)$

重要な注意:「収束する数列は Cauchy 列をなす」の逆が成立する。即ち、

命題 1.1 「収束する数列は *Cauchy* 列をなす」$\iff$「*Cauchy* 列は収束する」

この命題の $\Longleftarrow$ の証明には、次の補題を使う。

補題 1.1 (Bolzano-Weierstrass) 有界な数列は収束する部分列を持つ。

重要な注意：一般の距離空間では、有界な数列で収束する部分列を持たないものがある[4]。

1.2.2 級数の収束条件

定理 1.2 (Cauchy) 正項級数 $\sum a_n$ に対し、ある数 q（$0 \leq q < 1$）とある番号 N があって、

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad (n \geq N)$$

ならば $\sum a_n$ は収束する。また $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する。

注意：$\sum q^n$ と比較しているのだが、1 年次に習ったのは、『$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ が収束してその値が 1 未満だったら $\sum a_n$ は収束する、もしその値が 1 を真に越えていたら発散する』というものであった。

定理 1.3 (d'Alembert) 正項級数 $\sum a_n$ に対し、ある数 q（$0 < q < 1$）とある番号 N があって、

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q \quad (n \geq N)$$

ならば $\sum a_n$ は収束する。また $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する。

注意：$\sum q^n$ と比較しているのだが、1 年次に習ったのは、『$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ が収束してその値が 1 未満だったら $\sum a_n$ は収束する、もしその値が 1 を真に越えていたら発散する』というものであった。

[4] コンパクト性のところで説明する

定理 1.4 (Gauss) 正項級数 $\sum a_n$ に対し、ある数 $\rho > 0$ と $\alpha > 0$ があって、

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{\rho}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \quad (n \to \infty)$$

となるならば、$\rho > 1$ のときは $\sum a_n$ は収束し、$\rho \leq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する。

注意：$\sum n^{-p}$ と比較している。

1.2.3 『この数列は収束しない』をどう示すのか？

数学的思考の一つの特徴として、背理法なるものがあることを強調し、これは「計算機にはできないぞよ」と 誇らしげに言ってきた。しかし、背理法を駆使するためには、「ある命題を否定する」とは何かをはっきり認識する必要がある。この立場で、『この数列は収束しない』をどう示すのか？に一つの解答を与えよう。

重要な注意　:『すべての星は赤い』と主張している人には、『少なくとも一つは赤くない星がある』、ほらあそこに見える星は赤くないだろう、と見せれば、その主張を否定できたことになろう。とはいえ、「君は何故あれを星というのかね。私の辞書では赤くないものは星とは言わない[5]。」と言われると延々と議論が続きそうである。『すべての星は赤い』と主張している人が生き残れば、それが正しいことになるのが、世の中である[6]。

数学界では『すべての星は赤い』という主張の否定は『少なくとも一つは赤くない星がある』である、と理解されている[7]。それ故に、主張する人の生存、非生存には影響されずに、主張する内容が正しいと判定されると何千年も正しいこととして通用してきている。

> もっとも、どのみち正しいと判定するのは人間なのだから、間違わないためにはどうしたらよいかと色々の工夫をしなければならない。最大の工夫は「証明」であり、それの根幹は正しい仮定から、適切な推論のもと、正しい結論を導くことにある[8]。但し、この書き方だとトートロジー[9]だと言われかねないのだが。

これからは、『証明というものがあって、その推論を了解すれば、その証明付き命題の内容を生理的に嫌だとしても認めるという立場の人しかいない』という世界に住んでいるとして、論理なるものを考えていく。

素朴な問題　:『数列 $\{a_n\}$ は α に収束する』という命題の否定をどう示したら良いか？更に、数列が与えられたとき、『この数列は収束しない』をどう表現したらよいのか？

さて『数列 $\{a_n\}$ は α に収束する』という事柄は、

「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」とか「$a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$」とか「$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$」

等と表記されるが、これはどういう内容の事柄か？我々はこれを

[5] 星といわれるものの必要条件は色が赤いということなのだよ
[6] だからこそ、「それでも地球が廻っている」という勇気は賞賛される
[7] ここで、排他律が仮定されていることは重要
[8] 仮定から適切な推論で結論を導くだけで、論理学的には正しい作業をしていることになる。ところで、「太陽が西から上がれば、臍で茶を沸かしてやる」という命題は論理学的には間違っていない、ことには注意
[9] tautology：同義語反復

任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある自然数 N があって、「$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となる」ことをいう、

と書いて、これが定義だと宣言し、これで上の表現形態「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」を用いればこの内容として万国共通に伝わるとした。

記号論理学の記法を用いて、「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」の内容を

$$(*) \qquad (\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\neg(n > N) \vee (|a_n - \alpha| < \epsilon)),$$

とし、最後の $\neg(n > N) \vee (|a_n - \alpha| < \epsilon)$ は $(n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$ と書き換えもした。これより、$(*)$ を記号論理学の操作で否定すると、

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})((n > N) \wedge (|a_n - \alpha| \geq \epsilon)),$$

となり、これが『数列 $\{a_n\}$ は α には収束しない』を表していることになる。

『数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列をなす』は

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N)(\forall m)(\forall n)(\neg(m, n > N) \vee (|a_m - a_n| < \epsilon))$$

と表記されるから、その否定は

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall N)(\exists m)(\exists n)(\neg\neg(m, n > N) \wedge \neg(|a_m - a_n| < \epsilon))$$

となる。最後の部分を書き換えて

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall N)(\exists m)(\exists n)((m, n > N) \wedge (|a_m - a_n| \geq \epsilon))$$

となる。故に『数列 $\{a_n\}$ は収束しない』は『ある $\epsilon > 0$ があって、どんな N をとっても、ある $m, n > N$ があって $|a_m - a_n| \geq \epsilon$ となる』ということになる。

命題論理について :『数列 $\{a_n\}$ が α に収束する』の否定命題『数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない』とはどういうことか考えてみよう。

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ は } \alpha \text{ に収束しない。} \Longleftrightarrow (\exists\epsilon)(\forall N)\neg(\forall n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon).$$

ところで、$(\forall n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$ の否定が $(\forall n > N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \epsilon)$ となることは、以下の記号論理学の記述[10]を見ると推定できるであろう：まず、$(\neg A)\vee B$ を $A \Rightarrow B$ と記述することにする。

$$(\neg A)\vee B \equiv (A \Rightarrow B), \quad \neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg((\neg A)\vee B) \equiv A \wedge (\neg B),$$
$$\neg(\neg(A \Rightarrow B)) \equiv \neg(A \wedge (\neg B)) \equiv (\neg A)\vee B \equiv (A \Rightarrow B).$$

上に述べた集合の演算と記号論理での演算を比較しておこう。

$$\neg A \longleftrightarrow A^c, \quad A\vee B \longleftrightarrow A \cup B, \quad A \wedge B \longleftrightarrow A \cap B.$$

[10] 以下の命題は集合論との比較で納得し易いだろう。集合論の方はこれは図視化できる、ベン図とかいうのでは？

1.2.4 上極限と下極限

定義 1.6 (拡大実数) 実数の全体に無限遠点 $\{\pm\infty\}$ を付加したものを拡大実数 *(extended real number)* 或いは補完数直線と言い $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ と書く。

定義 1.7 任意の実数列 $\{a_n\}$ に対し $l_n = \sup_{m \geq n} a_m$ とおくと、これは単調減少列だから $l = \lim_{n\to\infty} l_n$ が存在する。これを数列 $\{a_n\}$ の上極限といい $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ 或いは $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と記述する。

$m_n = \inf_{m \geq n} a_m$ とおくと、これは単調増加列だから $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ が存在する。これを数列 $\{a_n\}$ の下極限といい $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ 或いは $\liminf_{n\to\infty} a_n$ と記述する。

定義 1.8 実数列 $\{a_n\}$ の部分列の極限となる点 $x \in \bar{\mathbb{R}}$ を、数列 $\{a_n\}$ の集積値という。

定理 1.5 実数列 $\{a_n\}$ と $l \in \bar{\mathbb{R}}$ に対し、以下は同値である：

(a) $l = \lim_{n\to\infty} l_n$, $l_n = \sup_{m \geq n} a_m$.
(b) (i) $l < x$ となる任意の $x \in \bar{\mathbb{R}}$ をとると、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n < x$ となる。
　(ii) $y < l$ となる任意の $y \in \bar{\mathbb{R}}$ に対し、$y < a_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限に存在する。
(c) l に収束する $\{a_n\}$ の部分列が存在する。$l < x$ となる x に収束する $\{a_n\}$ の部分列は存在しない。
(d) l は数列 $\{a_n\}$ の $\bar{\mathbb{R}}$ における集積値の内で最大なものである。

証明：（い）$(a) \Longrightarrow (b)(i)$：$l < x$ とすると、l の定義から $l_{n_0} < x$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ があって、すべての $n \geq n_0$ に対して $a_n \leq l_{n_0} < x$ である。
$(a) \Longrightarrow (b)(ii)$： $y < l$ ならば、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $y < l \leq l_n$ であるから、$y < a_{m_0} \leq l_n$ となる数 $m_0 \geq n$ が存在する。n は任意だったから $y < a_m$ となる $m \in \mathbb{N}$ が無限にあることになる。

$(b) \Longrightarrow (a)$：$l' = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ とし、これが (b) で定まる l と等しいことを示す。

仮定 $(b)(i)$ より、$l < x$ となる任意の $x \in \bar{\mathbb{R}}$ に対し $n_0 \in \mathbb{N}$ があって、$n \geq n_0$ に対して $a_n \leq l_{n_0} \leq x$ となる。故に $n \geq n_0$ ならば $l_n \leq x$ となるから $l' \leq l_{n_0} \leq x$ である。x は $l < x$ となる任意の元であるから $l' \leq l$ となる（実際、もし $l > l'$ ならば $l < x < l'$ となる x があるから、今示したことに矛盾する）。

次に、$y < l$ となる任意の $y \in \bar{\mathbb{R}}$ をとると、$(b)(ii)$ より、$y < a_n \leq l_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に存在するから、$y \leq l'$ となる。実際、もし $y > l'$ ならば $(a) \Longrightarrow (b)(i)$ により有限個の n を除き $y > a_n$ となり、上記に矛盾する。y は $y < l$ となる任意の元だから、$l \leq l'$ となる（もし、$l > l'$ ならば $l > y > l'$ なる y をとると矛盾を生じる）。

（ろ）$(b) \Longrightarrow (c)$：(b) を満たす l が $+\infty$ ならば、(ii) により $l = +\infty$ に収束する部分列がある。このとき $l < x$ なる $x \in \bar{\mathbb{R}}$ は存在しないから (c) の後半部分は考えなくて良い。もし l が $-\infty$ ならば、(i) により $-\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$ である。従って、このとき $l < x$ となる x に収束する部分列は存在しない。(b) を満たす l が実数ならば、任意の $\epsilon > 0$ に対し $x = l + \epsilon$, $y = l + \epsilon$ とおくと (b) より $a_n \in U(l, \epsilon)$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に存在する。従って l に収束する部分列が存在する。このとき $l < x$ となる任意の x をとるとき、$l < x' < x$ となる $x' \in \mathbb{R}$ がある。(i) により $x' \leq a_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ は有限個しかないから、x は数列 $\{a_n\}$ の部分列の極限にはなり得ない。

$(c) \Longrightarrow (b)$：(c) を満たす $\bar{\mathbb{R}}$ の元を l とする。(i)：$l < x$ となる $x \in \bar{\mathbb{R}}$ に対し $x \leq a_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限にあれば、そのような a_n の作る部分列が更に収束する部分列を含む。その極限 α は $\alpha \geq x > l$ でるから、こ

れは (c) に反する。故に $(b)(i)$ が成立する。(ii)：$y<l$ なる y をとる。l の近傍 U を $U\subset(y,\infty]$ なるようにとると、l に収束する部分列があるのだから、$a_n\in U$ 従って $y<a_n$ なる n が無数に存在する。

（は）$(c)\Longleftrightarrow(d)$：これは集積値の定義より明らかであろう。 $\square$

このような概念を導入したことによるメリットは何か、デメリットは何か？

演習問題 1.3 数列 $\{a_n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow\ \overline{\lim}\,a_n=\underline{\lim}\,a_n$.

演習問題 1.4 [11] 次の不等式を示し、等号が成立しない例を挙げよ。

$$(i)\ \overline{\lim}\,(a_n+b_n)\le\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n,\quad (ii)\ \underline{\lim}\,(a_n+b_n)\ge\underline{\lim}\,a_n+\underline{\lim}\,b_n,$$
$$(iii)\ a_n>0,\ b_n>0\Longrightarrow\overline{\lim}\,(a_n{\cdot}b_n)\le\overline{\lim}\,a_n{\cdot}\,\overline{\lim}\,b_n,$$
$$(iv)\ a_n>0,\ b_n>0\Longrightarrow\underline{\lim}\,(a_n{\cdot}b_n)\ge\underline{\lim}\,a_n{\cdot}\,\underline{\lim}\,b_n,$$

定理 1.6 $\{b_n\}$ を有界でない狭義の単調列ならば、$n\to\infty$ に対して

$$\underline{\lim}\,\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\le\underline{\lim}\,\frac{a_n}{b_n}\le\overline{\lim}\,\frac{a_n}{b_n}\le\overline{\lim}\,\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

証明：中央の不等式は定義より明らか。$\{b_n\}$ を増加列と仮定しても一般性を失わない。記号の簡略化のために、上式の左右両端の辺の値をそれぞれ $\underline{\alpha},\ \bar{\alpha}$ と書く。

まず $-\infty<\underline{\alpha}\le\bar{\alpha}<\infty$ の場合を考える。任意の $\epsilon>0$ に対し、ある N があって $n>N$ ならば

$$\underline{\alpha}-\frac{\epsilon}{2}<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<\bar{\alpha}+\frac{\epsilon}{2}$$

となる。仮定より $b_n-b_{n-1}>0$ だから $n>N$ のとき

$$\begin{aligned}\Big(\underline{\alpha}-\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_n-b_N)&=\Big(\underline{\alpha}-\frac{\epsilon}{2}\Big)\sum_{k=N+1}^{n}(b_k-b_{k-1})<\sum_{k=N+1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_N\\&<\Big(\bar{\alpha}+\frac{\epsilon}{2}\Big)\sum_{k=N+1}^{n}(b_k-b_{k-1})=\Big(\bar{\alpha}+\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_n-b_N)\end{aligned}$$

を得る。$b_n\to\infty\ (n\to\infty)$ だから N を十分大きくとれば $b_n>0(n>N)$ であるから、

$$\Big(\underline{\alpha}-\frac{\epsilon}{2}\Big)\Big(1-\frac{b_N}{b_n}\Big)+\frac{a_N}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<\Big(\bar{\alpha}+\frac{\epsilon}{2}\Big)\Big(1-\frac{b_N}{b_n}\Big)+\frac{a_N}{b_n}$$

となる。再度 $b_n\to\infty\ (n\to\infty)$ に注意し、$N'>N$ を適当に選べば、$n>N'$ のとき $\underline{\alpha}-\epsilon<a_n/b_n<\bar{\alpha}-\epsilon$ となる。

$\underline{\alpha}=+\infty$ とする。任意の $K>0$ に対しある数 N と $N'>N$ を選ぶと

$$\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}>2K\ (n>N),\quad \text{i.e.}\quad a_n-a_{n-1}>2K(b_n-b_{n-1})\ (n>N),$$
$$\frac{a_n}{b_n}>2K\Big(1-\frac{b_N}{b_n}\Big)+\frac{a_N}{b_n}>K\ (n>N');\quad \frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

$\bar{\alpha}=-\infty$ の場合は $\{a_n\}$ の代わりに $\{-a_n\}$ を考えれば良い。また、$\underline{\alpha}=-\infty$ 或いは $\bar{\alpha}=+\infty$ のときは明らか。 $\square$

[11] (iii), (iv) はこのままでは正しくない！メモを見よ

定理 1.7 任意の正数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\underline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

演習問題 1.5 定理 *1.7* の証明を与えよ。

==

メモ：去年度用いた講義室 H111 は階段教室でやりにくいと申し出て、広いがフラットな講義室 W621 に変えてもらった。多分連休明けには出席者が減ることが予想されると思っていたが、予期せぬ出来事で連休明けから講義を開始したので「減ることは」気付かずに済んだ。

例によって、「何故この講義が必修なのか」と解析概論では「無限小、無限大」の理解の為に ϵ-δ や ϵ-N 論法が今の所ではあるが必要なことを説明した。また、物理学と数学の感触の違いを、Feynman による Bohr の対応原理を経路積分表示から導出する考え方、等をざっとだが述べて説明した。去年度よりは、「聞いていてくれた」ように感じたのだが？

演習 1.4 で

$$(iii)\ a_n > 0,\ b_n > 0 \Longrightarrow \overline{\lim}\,(a_n{\cdot}b_n) \le \overline{\lim}\,a_n{\cdot}\,\overline{\lim}\,b_n$$

を示せと書いたが、$a_n = 1/n$ かつ $b_n = n^2$ とすると $\overline{\lim}\,(a_n{\cdot}b_n) = \overline{\lim}\,n = \infty$ となるが $\overline{\lim}\,1/n = 0$ かつ $\overline{\lim}\,n^2 = \infty$ であり $\infty \le 0{\cdot}\infty$ とはどういうことだろうか？この問題は、但し書きが必要で、「数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ で $0{\cdot}\infty$, $\infty{\cdot}0$ となるものは除いて」とする必要がある！

定理 1.5（d）の証明に対して、何故最大と言えるのかという質問があった。即ち、（は）$(c) \Longleftrightarrow (d)$ の「集積値の定義より明らか」という部分に合点がいかないということであろう。講義では証明をしなかったが、講義録を読んだところで了解しただろうか？

履修申請者??名、出席者多分 70 名ぐらいか？

————————————————————

去年度メモ：講義室 H111（階段教室でやりにくい）、出席者 75 名程、質問も少なく盛り上がりに乏しかったのが、残念。私のホームページを見たり、この講義の予習をした人は誰もいなかったようだ。また、授業終了時間前に席を立って出ていく人がいたが、階段教室はそれが目立って気分を削がれる。

物理学科のある教官に聞くと、この授業を推奨科目としているのは、「数学者による数学の取扱いを見て欲しいだけで、内容について特別のことはない」とのことである[12]。数学的な厳密さと理論物理との微分方程式を介しての関連を縷々述べるつもりであり、今回も Planck 定数の由来、水素原子のスペクトル線、古典力学と量子力学の関連、Feynman による Bohr の対応原理を経路積分表示から導出する考え方、等をざっとだが述べた。ただあっけにとられた顔をのみ散見した。

[12] これは極めてもっともな意見だと思われる。しかし、数学者の集団がこれが当然の反応だと云うことを理解できるだろうかは疑問