

1 実数とその性質

2 距離空間とその位相

2.1 距離空間の定義と性質

2.2 完備距離空間

2.3 距離空間の完備化

例: $C[0, 1]$ はノルム $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ から導かれた距離で完備である。

証明: $\{f_n\}$ を $C[0, 1]$ で $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_\infty = 0$ を満たす関数列とする。即ち、

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall m)(\forall n)(m, n \geq N \implies \sup_{x \in [0, 1]} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon).$$

すると、任意の $x \in [0, 1]$ に対し $\{f_n(x)\}$ は数列として Cauchy 列になるので、 $f(x)$ があって $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ となる。

$f(x)$ は連続である: 仮定より、任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な番号 N があって、 $m, n \geq N$ ならば $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \epsilon$ 。任意の $x_0 \in [0, 1]$ に対して $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \epsilon$ となり、ここで $m \rightarrow \infty$ とすると $|f(x_0) - f_n(x_0)| \leq \epsilon$ となる。言い変えると、任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な番号 N があって、任意の $x_0 \in [0, 1]$ で $n \geq N$ ならば $|f(x_0) - f_n(x_0)| \leq \epsilon$ となる。即ち、 f_n は f に $[0, 1]$ 上で一様に収束しているので、 f は $[0, 1]$ で連続となる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ となる: 上の議論から、 $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x_0 \in [0, 1]} |f(x_0) - f_n(x_0)| \leq \epsilon$ となる。 \square

例: より一般に、ノルム $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ ($1 \leq p < \infty$) から導かれた距離で $C[0, 1]$ は完備ではない!

証明: さて、関数を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ -(n/2)x + (n+2)/4 & 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と定義する。 $n > m$ に対し

$$f_n(x) - f_m(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1/2 - 1/m \\ (m/2)x - (m-2)/4 & 1/2 - 1/m \leq x < 1/2 - 1/n \\ (m-n)x/2 + (n-m)/4 & 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 \\ (n-m)x/2 + (m-n)/4 & 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ (m/2)x - (m+2)/4 & 1/2 + 1/n \leq x \leq 1/2 + 1/m \\ 0 & 1/2 + 1/m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

となるから

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

であり、 $\{f_n\}$ は基本列をなす。 f は Riemann 積分可能だから

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

となるが、 $f \notin C[0, 1]$, $f_n \in C[0, 1]$ より『 $C[0, 1]$ は $\|\cdot\|_1$ で完備ではない』ことが示された。 $1 < p < \infty$ に対し $\{f_n\}$ は $\|\cdot\|_p$ で基本列をなすことも同様に示される。

定理 2.1 (距離空間の完備化) (a) (X, d) を距離空間とすると、完備な距離空間 (\tilde{X}, \tilde{d}) 及び X から \tilde{X} の中への関数 ι があって、 $\iota(X)$ は \tilde{X} で稠密であり、任意の $x, y \in X$ に対して $\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$ が成立つ。

(b) (\tilde{X}, \tilde{d}) は以下の意味で一意的である：もし (Y, ρ) を完備距離空間とし、 X から Y の中への関数 g があって、 $g(X)$ は Y で稠密であり、任意の $x, y \in X$ に対して $\rho(g(x), g(y)) = d(x, y)$ が成立つとする。このとき、 \tilde{X} から Y の上への関数 h があって、 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ に対し $\rho(h(\tilde{x}), h(\tilde{y})) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$ が成立する。

証明のヒント： X の基本列全体 \mathcal{C} を考える。 $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}$ に同値関係 \sim を

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

と導入し、 $\tilde{X} = \mathcal{C} / \sim$ と定める。 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ に対し、その代表元 $\{x_n\} \in \tilde{x}$ と $\{y_n\} \in \tilde{y}$ をとり $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ と定める。これが代表元の取り方に依らないことを示す。

演習問題：上の定理をヒントを用いて証明せよ¹。

完備化したものが必要な理由を、微分方程式の解法との関連で述べた。これについては、後に詳しく講義する予定である。

=== 以下の例は、ゆとりがある人のみ考察すれば良い ===

以下、竹之内「トポロジー」から、完備化の例を借用した。

問： \mathbb{Q} は例 6 の p 進距離で完備ではない。これを完備化したものはどうなるか？

\mathbb{F}_p を素数とし \mathbb{Q} に

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \text{ のとき,} \\ p^{-m}, & a \neq b \text{ であり, } a - b = p^m s / r \text{ のとき} \end{cases}$$

(ここに、 r, s は p で割り切れない整数、 m は正、負の整数または 0) として、距離を入れることができる。』

答え： $a_n = p + p^{2^1} + \dots + p^{n!}$ は基本列である。実際、 $n > m$ に対し

$$a_n - a_m = p^{n!} + \dots + p^{(m+1)!} = p^{(m+1)!} (1 + \dots + p^{n! - (m+1)!})$$

だから

$$d(a_n, a_m) = p^{-(m+1)!} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

しかし、その極限は $p + p^{2^1} + \dots + p^{n!} + \dots$ であり \mathbb{Q} には入らない²。

形式的に

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \{ \alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \dots \mid m \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \alpha_k < p (k = m, m+1, \dots) \}$$

¹この講義録の最後に証明を与えておくので必要ならば参照のこと

²これを示すには、以下の例 7 に関する問及び答えの証明を真似れば良い

とおき、そこでの距離を

$$\tilde{d}(\alpha_m p^m + \cdots, \beta_l p^l + \cdots) \begin{cases} 0, & \alpha_k = \beta_k (\forall k) \text{ のとき,} \\ p^{-k}, & \alpha_k \neq \beta_k \text{ であるような最小の } k \end{cases}$$

とおく。この $\tilde{\mathbb{Q}}$ が完備な距離空間になることは難しくなく示される³。

\mathbb{Q} から $\tilde{\mathbb{Q}}$ への等距離写像 ϕ をつくる。任意の有理数 $a = p^m s/r$ を考える。ここで、 r, s は p で割り切れない互に素な 2 数とする。

$$s, s-r, s-2r, \dots, s-(p-1)r$$

を p で割ったときの剰余を

$$u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$$

とすると、これらは $0 \leq u_j < p$ のみならず、すべて相異なる⁴。ところで u_0, u_1, \dots, u_{p-1} は相異なる $0 \leq u_j < p$ を満足する p 個の整数なのだから、どれかの u_j は 0 となる。そこで $u_{j_0} = 0$ とすれば $s - j_0 r$ は p で割り切れるので $s - j_0 r = p s_{m+1}$ と書くことができる。ここで改めて $j_0 = \alpha_m$ と書くと

$$s = \alpha_m r + p s_{m+1}, \quad 0 \leq \alpha_m < p$$

となる。 $a = p^m s/r$ を $= p^m s_m/r$ と書き直す⁵と、上と同様の議論で

$$s_{m+1} = \alpha_{m+1} r + p s_{m+2}, \quad 0 \leq \alpha_{m+1} < p$$

と唯一通りに書ける。これを繰り返して、任意の整数 $k \geq m$ に対して

$$s = \alpha_m r + p s_{m+1} = \alpha_m r + p \alpha_{m+1} r + p^2 s_{m+2} = \alpha_m r + p \alpha_{m+1} r + \cdots + p^{k-m} \alpha_k r + p^{k-m+1} s_{k+1}$$

($0 \leq \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_k < p$) と書け、このような表し方は唯一通りである。各 $k = m, m+1, \dots$ に対して α_k は確定するから $\tilde{\mathbb{Q}}$ の中の元

$$\alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k + \cdots$$

が定まる。これを $\phi(a)$ と書く。これが等距離写像なることを示そう。

$\alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k$ は \mathbb{Q} の元であるとともに $\tilde{\mathbb{Q}}$ の元とも見なせる。このとき

$$\begin{aligned} d(\alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k, \beta_l p^l + \beta_{l+1} p^{l+1} + \cdots + \beta_h p^h) \\ = \tilde{d}(\alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k, \beta_l p^l + \beta_{l+1} p^{l+1} + \cdots + \beta_h p^h). \end{aligned}$$

なることは明らかである。さて、 \mathbb{Q} の 2 元 $a = p^m s/r$ 、 $a' = p^m s'/r'$ をとって

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k + \cdots, \\ \phi(a') &= \beta_l p^l + \beta_{l+1} p^{l+1} + \cdots + \beta_h p^h + \cdots \end{aligned}$$

とする。いま、

$$x_k = \alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k, \quad x'_k = \beta_l p^l + \beta_{l+1} p^{l+1} + \cdots + \beta_k p^k$$

とおけば、 $\tilde{\mathbb{Q}}$ において

$$\tilde{d}(x_k, \phi(a)) \leq p^{-(k+1)}, \quad \tilde{d}(x'_k, \phi(a')) \leq p^{-(k+1)}$$

³例 8 の完備性の証明を見よ

⁴もし $u_j = u_k (j \neq k)$ となると矛盾を生じる

⁵前の原稿では $= p^m s_m/r_m$ となっていたが T 君の指摘通り r_m は必要ない

となる。故に、 $\tilde{\mathbb{Q}}$ の中で $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \phi(a)$ 、 $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_k = \phi(a')$ となる。 ϕ の作り方から、

$$a = p^m s/r = \alpha_m p^m + \alpha_{m+1} p^{m+1} + \cdots + \alpha_k p^k + p^{k+1} s_{k+1}/r = x_k + p^{k+1} s_{k+1}/r$$

であり、 $d(x_k, a) \leq p^{-(k+1)}$ (s_{k+1} は p で割り切れるかもしれない) となる。同様に $d(x'_k, a') \leq p^{-(k+1)}$ 、故に、 \mathbb{Q} の中で $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ 、 $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_k = a'$ となる。距離関数の連続性より

$$\tilde{d}(\phi(a), \phi(a')) = d(a, a')$$

となる。

この写像 ϕ によって \mathbb{Q} を $\phi(\mathbb{Q})$ と同一視し、 \mathbb{Q} を $\tilde{\mathbb{Q}}$ の一部と考えることができる。また、 \mathbb{Q} が $\tilde{\mathbb{Q}}$ の中で稠密なることも上の構成から、明らかであろう。

実は、 $\tilde{\mathbb{Q}}$ の上で四則演算を定義できて、 $\tilde{\mathbb{Q}}$ は体をなすことが分る。 $\tilde{\mathbb{Q}}$ を p 進体といい、 \mathbb{Q}_p と書く。 \square

問：有理関数全体 S への例 7 による距離は完備ではない。これを完備化したものはどうなるか？

『ある体 K の元を係数とする 1 変数 X の有理関数全体を S とし、1 より大きな素数 p を任意に一つとる。 S の 2 つの要素 a, b に対し

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \text{ のとき,} \\ p^{-m}, & a \neq b \text{ であり, } a - b = X^m g(X)/f(X) \text{ のとき} \end{cases}$$

(ここに $f(X), g(X)$ は 0 でない定数項を持つ多項式、 m は正、負の整数または 0)』

答え：有理関数列 $\{X + X^{2^1} + \cdots + X^{n^1}\}$ は基本列をなす： $n > m$ とすると

$$(X + X^{2^1} + \cdots + X^{n^1}) - (X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1}) = X^{n^1} + \cdots + X^{(m+1)^1} = X^{(m+1)^1} (1 + \cdots + X^{n^1 - (m+1)^1}).$$

だから

$$d(X + X^{2^1} + \cdots + X^{n^1}, X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1}) = p^{-(m+1)^1} \rightarrow 0 \quad (n > m \rightarrow \infty).$$

しかし、有理関数列 $\{X + X^{2^1} + \cdots + X^{n^1}\}$ は空間 S のいずれの元にも収束しない： S の任意の元は

$$a = X^\lambda \frac{f(X)}{g(X)} \quad f, g \text{ は共に 0 でない定数項をもつ } X \text{ の多項式}$$

と書ける。 $f(X)$ の次数を μ 、 $g(X)$ の次数を ν 、 $N = |\lambda| + \mu + \nu + 1$ とおく。 $m \geq N$ とすると

$$d(a, X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1}) \geq p^{-N!} \tag{1}$$

となる。実際

$$X^\lambda \frac{f(X)}{g(X)} - (X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1}) = \frac{1}{g(X)} [X^\lambda f(X) - (X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1})g(X)]$$

で、 $X^\lambda f(X)$ の最高次の項の次数は $\lambda + \mu \leq |\lambda| + \mu < N$ である。また、 $(X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1})g(X)$ においては、 $k > \nu$ のとき、 $X^{k^1}g(X)$ の各項は他の $X^{l^1}g(X)$ から出てくる各項と打ち消し合うことはないから、 g の定数項が 0 でないことと、 $N > \nu$ であることより、 $m \geq N$ ならば $(X + X^{2^1} + \cdots + X^{m^1})g(X)$ は、次数 $N!$ の項を必ず含む。故に $[\cdots]$ 内を $X^\kappa h(X)$ ($h(X)$ は定数項が 0 でない多項式) と書いたとき、 $\kappa \leq N!$ となる。 $p^{-\kappa} \geq p^{-N!}$ だから、(1) が成立する。

更に、 S の完備化は X の負冪が有限項の、係数体 K の元を係数とする形式的な級数全体

$$\tilde{S} = \{\alpha_{-m} X^{-m} + \alpha_{-m+1} X^{-m+1} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots\}$$

で与えられる⁶。 □

問：例 8 に与えた、自然数の無限数列全体への距離は完備である。

『 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \mid a_k \in \mathbb{N}\}$ とし $\mathbf{a} = (a_k), \mathbf{b} = (b_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ のとき,} \\ \frac{1}{n}, & a_j = b_j \ (j = 1, \dots, n-1) \text{ かつ } a_n \neq b_n \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。』

答え： $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の 2 元 $\mathbf{a} = (a_k), \mathbf{b} = (b_k)$ に対して $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 1/n$ とは $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ なることである。さて、 $\mathbf{x}_j = (x_k^{(j)})$ を基本列とすると、任意の $m = 1, 2, \dots$ に対して N_m を $l, l' \geq N_m$ ならば $d(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{l'}) < 1/m$ であるように定めれば、そのような l, l' に対して $x_m^{(l)} = x_m^{(l')}$ が成立つ。即ち、ある番号 N_m から先は $x_m^{(l)}$ と $x_m^{(l')}$ の値は一致するのでその値を x_m と書く。各 $m = 1, 2, \dots$ に対して定められた x_m によって、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ とすれば $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ であり、 $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x} (j \rightarrow \infty)$ 。 □

問： \mathbb{Q} を完備化したものが \mathbb{R} であった。それでは、 $C[0, 1]$ を $\|\cdot\|_1$ で完備化したものはどんな集合になるのだろうか？これが、Riemann 積分とは異なる Lebesgue 積分なる新しい積分論につながる。

====ここまでが、余裕人用====

定義 2.1 X を位相空間⁷とする。集合 $A \subset X$ が到るところ疎 (nowhere dense) であるとは $(\bar{A})^\circ = \emptyset$ なることをいう。集合 $F \subset X$ が第 1 類である (of first category) とは、 F が可算個の到るところ疎な集合の和で表されることである。第 1 類でない集合を第 2 類である (of second category) という。

定理 2.2 (Baire's category argument) 完備な距離空間 (X, d) は第 2 類である。即ち、任意の第 1 類集合 $A \subset X$ に対し $X \cap A^c$ が X で稠密となる。

証明： $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とし A_n を X で到るところ疎な集合とする。各 A_n は閉と仮定して良い (もし、そうでなかったら $X \cap A^c$ はより小さくなるだけだからである)。 X の空でない任意の開集合 V をとるとき、 $V \cap A^c \neq \emptyset$ なることを示せば良い。空でない開集合 $U_1 \subset V$ を $\text{diam}(\bar{U}_1) < 1$ なるように、例えば、 U_1 として半径が $< 1/2$ なる開球ととる。 U_1 は A_1 の部分集合とはなり得ないので $U_1 \cap A_1^c$ は空でない開集合となる。次に、空でない開集合 U_2 を $\bar{U}_2 \subset U_1 \cap A_1^c$ かつ $\text{diam}(\bar{U}_2) < 1/2$ なるようにとる。 U_1, U_2, \dots, U_n が選ばれ U_{j+1} は $\bar{U}_{j+1} \subset U_j \cap A_j^c$ であり $\text{diam}(\bar{U}_{j+1}) < 1/(j+1) (1 \leq j \leq n-1)$ を満たしているとする。すると、 $U_n \cap A_n^c \neq \emptyset$ であり U_{n+1} を $\bar{U}_{n+1} \subset U_n \cap A_n^c$ であり $\text{diam}(\bar{U}_{n+1}) < 1/(n+1)$ となるように選ぶことができる。故に、減少する空でない閉集合列 $\{\bar{U}_n\}$ で $\text{diam}(\bar{U}_n) \rightarrow 0$ なるものが構成された。 X は完備であるから $x \in X$ があって $\cap \text{diam}(\bar{U}_n) = \{x\}$ となる。すると、

$$x \in \cap \text{diam}(\bar{U}_n) \subset U_1 \cap \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset V \cap (\cup A_n)^c = V \cap A^c$$

となる。ところで、 V は任意の開集合だったのだから、これは A^c が X で稠密なることを意味する。 □

何故このような定理を Baire が考えたのか？初等関数から超越関数まで色々ありそうだが、それを区別する道具として考えだされたようである。

これが、どのように役立つか？例えば、連続関数の各点収束極限としてあらわされる関数は一般には連続でないことは知られているが、連続でない点はどの位あるのだろうか？という問への一つの答が以下になる。

⁶ どう証明したら良いか？上の p 進体の証明をくり返せ

⁷ この講義では位相空間の一般論は展開しないので、距離空間を念頭においておけば良い

命題 2.1 X を位相空間、 (Y, d) を距離空間、 $\{f_n\} \in C(X : Y)$ とし、任意の $x \in X$ で $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在するとする。集合

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in X \mid d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{k} \right\} \right]^{\circ}$$

と定めるとき、以下が成立する：

- (a) f は A の各点で連続である。
- (b) $X \cap A^c$ は X の第 1 類集合である。
- (c) X が第 2 類集合ならば、 $\{x \in X \mid f \text{ は } x \text{ で連続}\}$ は X で稠密である。

問題：Dirichlet 関数 $\chi_{\mathbb{Q}}$ は実数値連続関数の各点収束極限では得られないことを示せ。まず

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \{\cos(m! \pi x)\}^{2n} \right] \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

となることを示せ。

注意：連続関数全体 B_0 を第 0 級 Baire 関数という。連続関数の各点収束極限で連続でない関数全体 B_1 を第 1 級 Baire 関数という。以下この操作で第 n 級 Baire 関数 B_n を定める。上の注意は『Dirichlet 関数 $\chi_{\mathbb{Q}}$ は第 2 級 Baire 関数で、第 1 級 Baire 関数ではない』と表現される。

注意：Baire の定理は関数解析という、ある意味で線形代数の無限次元版、において更に重要な役割を果たす。また関数解析という考え方は偏微分方程式論に画期的な応用⁸を持ち、これによって偏微分方程式の解の存在、一意性、正則性が「解の具体的構成」から離れて論ぜられるようになった。弊害は個々の「関数」に対する思い込みがなくなりすぎ、具体的関数のイメージがあまりにも薄れてしまったことか。実解析とか調和解析とかいう部門があるにしても、その弊害の最たるものが、日本の解析関連研究者の「関数」それ自身に関する造詣の無さではなからうか？

それにもかかわらず、関数解析的方法を駆使して、水の流れに対して幾つかの現象（熱伝導方程式と絡めて「現れた結晶模様」⁹、Taylor 渦、ところで von-Karman 渦は説明できたのか？）を Navier-Stokes 方程式等を用いて説明できたことを強調した。

%%%%%%%%

完備化の証明：(以下は Cantor が有理数から実数を構成した方法と同様¹⁰) (X, d) を距離空間とする。 (\tilde{X}, \tilde{d}) の決定: X の基本列全体 \mathcal{C} を考える。2つの基本列 $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}$ に関係 \sim を

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

と導入するとこれが同値関係を与える。即ち、

$$(i) \{x_n\} \sim \{x_n\}, (ii) \{x_n\} \sim \{y_n\} \iff \{y_n\} \sim \{x_n\}, (iii) \{x_n\} \sim \{y_n\} \text{ かつ } \{y_n\} \sim \{z_n\} \implies \{x_n\} \sim \{z_n\}$$

なる¹¹。そこで、同値関係で割って $\tilde{X} = \mathcal{C} / \sim$ と定める。 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ に対し、その代表元 $\{x_n\} \in \tilde{x}$ と $\{y_n\} \in \tilde{y}$ をとると $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ と定めることができる。

任意の $\epsilon > 0$ に対してある数 N_1 があって $l, m \geq N_1$ ならば $d(x_l, x_m) < \epsilon$ となる。同様に N_2 をとれば $l, m \geq N_2$ ならば $d(y_l, y_m) < \epsilon$ となる。 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とし $l, m \geq N$ とすれば

$$|d(x_l, y_l) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_l, x_m) + d(y_l, y_m) < 2\epsilon^{12}$$

⁸ 科研費や数理研プロジェクトを用いた、吉田耕作ひさいる「関数解析的方法による偏微分方程式の研究」の役割も大きかった

⁹ この名前が出てこない！これが老化だが、調べると Bernard convection

¹⁰ と、ある本には書いてあったが、多分そうであろう。もし断言すると、元論文を確かめてのことではないので「講釈師見てきたように...」。しかしこのようなとき以下ではもっともらしく書いておくので、読者もそこそこ判断して欲しい

¹¹ 各自確かめて欲しい

¹² $d(x_l, y_l) + d(x_m, y_m) < 2\epsilon$ とあったがミスコピー

¹³

となるから $\{d(x_n, y_n)\}$ は実数内の基本列をなし極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ が存在する。

さて、これが代表元の取り方に依らないことを示す。

別の代表元を $\{x'_n\} \in \tilde{x}$ 、 $\{y'_n\} \in \tilde{y}$ ととると、3角不等式より

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$$

となる。右辺は $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ 、 $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ より、 $n \rightarrow \infty$ とすると 0 となる。

このようにして定めた \tilde{d} が \tilde{X} 上の距離を与えることは明らかであろう¹⁴。

\tilde{X} が距離 \tilde{d} に関して完備なること：基本列 $\{\tilde{x}_m\}$ をとりその代表元を $\tilde{x}_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots)$ とするとき、すべての j, k に対して

$$(*) \quad d(x_j^{(m)}, x_k^{(m)}) < \frac{1}{2^m}$$

と仮定してよい（もしそうでなければ、十分大きな j, k に対しては上式が成立するのだから、小さな j, k を捨てた数列をとり番号を付け替えれば良い）。そこで、数列 $\{x_m^{(m)}\}$ を考えると、これも基本列となるから、この基本列 $\{x_m^{(m)}\}$ が属する類を \tilde{x}_∞ とすれば、これが \tilde{X} での基本列 $\{\tilde{x}_m\}$ の極限になる。

任意の $\epsilon > 0$ に対して N を適当に取れば $l, m \geq N$ のとき $\tilde{d}(\tilde{x}_l, \tilde{x}_m) < \epsilon/2$ となる。 N を $1/2^N < \epsilon/8$ なるように十分大きくとっておく。(*) より

$$d(x_l^{(l)}, x_m^{(m)}) \leq d(x_l^{(l)}, x_k^{(l)}) + d(x_k^{(l)}, x_k^{(m)}) + d(x_k^{(m)}, x_m^{(m)}) \leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + d(x_k^{(l)}, x_k^{(m)}).$$

上式で $k \rightarrow \infty$ として

$$d(x_l^{(l)}, x_m^{(m)}) \leq \frac{2}{2^N} + \tilde{d}(\tilde{x}_l, \tilde{x}_m) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon.$$

これより $\{x_m^{(m)}\}$ が基本列をなす。これが属する類を \tilde{x}_∞ と書いたのだから

$$\tilde{d}(\tilde{x}_\infty, \tilde{x}_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k^{(k)}, x_k^{(m)})$$

である。ここで $m, k \geq N$ ととると

$$\begin{aligned} d(x_k^{(k)}, x_k^{(m)}) &\leq d(x_k^{(k)}, x_m^{(m)}) + d(x_m^{(m)}, x_k^{(m)}) \\ &\leq d(x_k^{(k)}, x_m^{(m)}) + \frac{1}{2^m} < \frac{3\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{7\epsilon}{8} < \epsilon \end{aligned}$$

なることより、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}(\tilde{x}_\infty, \tilde{x}_m) = 0$ である。

等距離埋め込みと稠密性：任意の $x \in X$ に対して基本列 (x, x, \dots) を代表元とする \tilde{X} の元を $\iota(x)$ と書く。すると

$$\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y) \quad (\forall x, y \in X).$$

そこで、 $\hat{X} = (\tilde{X} \setminus \iota(X)) \cup X$ とし、写像 $\phi: \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ を

$$\phi(\hat{x}) = \begin{cases} \iota(x) & \hat{x} = x \in X \\ \tilde{x} & \hat{x} = \tilde{x} \in \tilde{X} \setminus \iota(X) \end{cases}$$

と定める。これが \hat{X} から \tilde{X} への 1:1 かつ onto の写像になる。そこで \hat{X} 上の距離 \hat{d} を

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \tilde{d}(\phi(\hat{x}), \phi(\hat{y}))$$

¹⁴ 易しい事柄だが各自一度は確かめて欲しいという意味

と定めると、 \hat{X} と \tilde{X} は ι によって距離同型¹⁵になり、 \tilde{X} が \tilde{d} で完備だから \hat{X} も \hat{d} で完備となる。

X の \hat{X} での閉包が \hat{X} と一致する、即ち、任意の $\hat{x} \notin X$ をとるとき、これが X の一つの集積点であることを示せばよい。

$\hat{x} \in \hat{X} \setminus X = \tilde{X} \setminus \iota(X)$ だから $\hat{x} = \tilde{x}$ である。その代表元を $\{x_n\}$ とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対してある N があって $l, m \geq N$ ならば $d(x_l, x_m) < \epsilon$ となるから、 $m \geq N$ のとき

$$\hat{d}(\iota(x_m), \hat{x}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \hat{x}) = \lim_{l \rightarrow \infty} d(x_m, x_l) < \epsilon.$$

また、 x_m のいずれも \hat{x} と一致しないので、 \hat{x} は X の集積点である。

注意：以降記号を簡略化するために $\iota(X)$ を X と同一視、即ち、 \tilde{X} と \hat{X} を同一視することにする。

一意性：即ち『 X を稠密に含む2つの完備距離空間 $(\tilde{X}_1, \tilde{d}_1)$ 、 $(\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$ は、 X の点をそれぞれ自身の上に写す等距離写像 $\tilde{\phi}: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ によって距離同型である』を示す。 X を \tilde{X}_1 の部分集合とみて、これから \tilde{X}_2 の部分集合 X への恒等写像を f とする。任意の $x, y \in X$ に対して

$$\tilde{d}_1(x, y) = d(x, y) = \tilde{d}_2(x, y) = \tilde{d}_2(f(x), f(y))$$

となる。これより、 f は \tilde{X}_1 の部分集合 X から \tilde{X}_2 の部分集合 X への写像として一様連続となる。 X は \tilde{X}_1 で稠密であり、 \tilde{X}_2 は完備だから、連続写像 \tilde{f} ですべての $x \in X$ に対して $\tilde{f}(x) = f(x)$ となるものが存在する¹⁶。この \tilde{f} は \tilde{X}_1 から \tilde{X}_2 の上への等距離写像である。

\tilde{x}_1, \tilde{y}_1 ¹⁷ $\in \tilde{X}_1$ とするとき、 X が \tilde{X}_1 で稠密だから、 $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{d}_1(x_l, \tilde{x}_1) = 0$ 、 $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{d}_1(y_l, \tilde{y}_1) = 0$ となる数列 $\{x_l\}, \{y_l\} \subset X$ がある。すると、 \tilde{f} の連続性より

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{d}_2(f(x_l), \tilde{f}(\tilde{x}_1)) = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{d}_2(f(y_l), \tilde{f}(\tilde{y}_1)) = 0.$$

故に、

$$\tilde{d}_2(\tilde{f}(\tilde{x}_1), \tilde{f}(\tilde{y}_1)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{d}_2(f(x_l), f(y_l)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{d}_1(x_l, y_l) = \tilde{d}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1).$$

さて、任意の $\tilde{z}_2 \in \tilde{X}_2$ をとると、 X は \tilde{X}_2 で稠密だから X の点列 $\{z_j\} \subset X$ で \tilde{z}_2 に収束するものをとれる。すると、 $\{z_j\}$ は X で基本列であるから、 \tilde{X}_1 の基本列でもある。 \tilde{X}_1 は完備だから、 \tilde{X}_1 の元 \tilde{z}_1 に収束する。 \tilde{f} の連続性より $\tilde{f}(z_m) = z_m (m = 1, 2, \dots)$ は \tilde{X}_2 において $\tilde{f}(\tilde{z}_1)$ に収束するが、この点列は \tilde{z}_2 に収束するようになってあったから $\tilde{f}(\tilde{z}_1) = \tilde{z}_2$ である。故に、 $\tilde{z}_2 \in \tilde{f}(\tilde{X}_1)$ となり、 \tilde{f} は \tilde{X}_1 から \tilde{X}_2 へ onto である。□

=====

メモ：

¹⁵ \hat{X} と \tilde{X} は ι によって 1:1 かつ onto に写像され、距離を変えない
¹⁶ これを示せ。「連続写像」とは何かと言う質問があったが、関数と写像は同じように用いていたはずだが？強いて言えば、実数値の場合関数と言ひ、値がベクトル値とか一般の距離空間のような場合写像と言う傾向が強いし、ベクトル値関数ともいう
¹⁷ \tilde{y}_2 という記述ミス