解析概論 I 第１回演習：知識の確認問題 (特に極限、微分)

（2005 年 4 月 15 日）井上・野村

これは現時点での数学 (特に極限、微分) に関する諸君の数学的操作への慣れを確認し、今後の授業、演習に役立てようとするものである。

また、これの出来は、諸君の成績の下支えに用いるので、易しいから答えない等ということのないようにして欲しい。

==

問題 0：n を 2 より大きな偶数とし、曲線 $C_1 : y = x^n$ と $C_2 : y = n^x$ を定める。
(1) C_1 と C_2 の $x < 0$ における交点 P_n は唯一つである。
(2) C_1 と C_2 の $x > 0$ における交点の個数は幾つか？
(3) P_n の $n \to \infty$ での極限はどうなるか？

問題 1：以下の主張を証明せよ。

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \ell.$$

$$(b)\ a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ell.$$

$$(c)\ a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

問題 2：$[a, b]$ 上で連続な関数 f が、関数等式 $2f((x+y)/2) = f(x) + f(y)$ を満たすとき、f は x の１次式なることを示せ。（ヒント：もし $f(b) = f(a)$ ならば $g(x) = f(x) - f(a)$ とおくとき、$g(a) = g(b) = 0$ であり $g((a+b)/2) = 0$ となる。繰り返すと $\cdots$）

問題 3： $|c| < 1$ ならば、任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} e^{nz}$ は絶対収束することを示せ。

問題 4： $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ で定義された関数は、$x = 0$ で無限回微分可能であるが、そのまわりで Taylor 展開できないことを示せ。

===========

正項級数の収束判定法

定理 0.1 (比較判定法) $a_n,\ b_n > 0$ とし、ある定数 $K > 0$ があって $a_n \le K b_n$ が十分大きな n に対して成立するとする。このとき、$\sum b_n$ が収束するならば、$\sum a_n$ も収束する。対偶をとれば、$\sum a_n$ が発散するならば $\sum b_n$ も発散する。

特に $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = \rho$ が存在して、$0 < \rho < \infty$ のとき $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束、発散する。

系 0.1 (Cauchy の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \text{ が存在するとする} \Longrightarrow \begin{cases} \text{もし } 0 \le r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

系 0.2 (d'Alembert の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ が存在するとする} \Longrightarrow \begin{cases} \text{もし } 0 \le r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

問題意識：Cauchy の判定法や d'Alembert の判定法の仮定 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ や $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在する、が満たされないときどうなるのか？とちょっとは考えて欲しいのである。