

「解析概論第1追試験問題」

12月19日(月)数学科第6演習室(H334)、pm1.00 - pm4.00! 井上

問題は4題、答案用紙は4枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

授業や演習に関する物言い(助言、苦情等)感想を是非記して下さい(試験後1週間以内にe-mailで私宛に送っても良い)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない!

=====

1 I を \mathbb{R}^n の集合とし、有界関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ と、 $\emptyset \neq U \subset I$ なる U に対し、 f の U における振幅 (amplitude, oscillation) $O(f, U)$ を

$$O(f, U) = \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x) (= \sup_{y, z \in U} |f(y) - f(z)|)$$

と定める。 $x \in I$ に対し関数 $O(f, I \cap B_\delta(x))$, $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \delta\}$ は $\delta \rightarrow +0$ のとき単調減少で

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} O(f, I \cap B_\delta(x)) = o(f, x)$$

が存在する。これを f の一点 x における振幅という。

コンパクト集合 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上の有界関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ に対し以下を証明せよ:

(1) f が $x \in I$ で連続とする $\iff o(f, x) = 0$.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対し $B = \{x \in I \mid o(f, x) \geq \epsilon\}$ は閉集合である。

2 (a) 数列 a_n が Cauchy 列をなすことの定義を述べよ。

(b) f を $[0, 1]$ 上の連続関数とする。この時、 $[0, 1]$ 内の任意の Cauchy 列 $\{a_n\}$ に対し $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列をなすことを示せ。

(c) f が $(0, 1]$ 上の連続関数の場合、(b) の主張は成立するか。成立する場合はその証明を、成立しない場合は反例をあげよ。

(d) f を $[0, 1]$ から $(0, 1)$ への関数とし、 $(0, 1)$ 内の任意の Cauchy 列に対し $\{f(a_n)\}$ も Cauchy 列をなすものとする。このとき f は連続関数となるか。正しければその証明を、主張が間違いならば反例をあげよ。

3 関数 $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - (x + y + z)^2$ の極値を求めよ。

4 (a) 点 $P = (X, Y, Z)$ から定平面 $T_p : \ell x + my + nz = p$ ($\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$) への距離 $d((X, Y, Z), T_p)$ を Lagrange 未定乗数法を用いて求めよ。

(b) 点 $P = (X, Y, Z)$ が楕円面 $X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1$ 上を動く時、点 P と定平面 $T_p : \ell x + my + nz = p$ の距離の最大値を求めよ。但し、 $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ とする。