解析概論第一期末追試験解答例（2005 年 12 月 19 日）井上淳

$\boxed{1}$ I を $\mathbb{R}^n$ の集合とし、有界関数 $f: I \to \mathbb{R}$ と、$\emptyset \neq U \subset I$ なる U に対し、f の U における振幅（amplitude, oscillation）$O(f,U)$ を

$$O(f,U) = \sup_{x\in U} f(x) - \inf_{x\in U} f(x) (= \sup_{y,z\in U} |f(y)-f(z)|)$$

と定める。$x \in I$ に対し関数 $O(f, I\cap B_\delta(x))$, $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < \delta\}$ は $\delta \to +0$ のとき単調減少で

$$\lim_{\delta\to+0} O(f, I\cap B_\delta(x)) = o(f,x)$$

が存在する。これを f の一点 x における振幅という。

コンパクト集合 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上の有界関数 $f: I \to \mathbb{R}$ に対し以下を証明せよ：
(1)[10] f が $x \in I$ で連続とする $\Longleftrightarrow o(f,x) = 0$.
(2)[10] 任意の $\epsilon > 0$ に対し $B = \{x \in I \mid o(f,x) \geq \epsilon\}$ は閉集合である。

—————————————-

解答例:

(1) ($\Longrightarrow$) f が $x \in I$ で連続ならば、任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって $|x-y| < \delta$ のとき $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ だから $0(f, I\cap B_\delta(x)) \leq \epsilon$ となる。故に $o(f,x) \leq 0(f, I\cap B_\delta(x)) \leq \epsilon$ であり、$o(f,x) = 0$ となる。 □
（$\Longleftarrow$）$o(f,x) = 0$ とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって $0(f, I\cap B_\delta(x)) \leq \epsilon$ となる。$0(f, I\cap B_\delta(x)) = \sup_{y,z\in I\cap B_\delta(x)} |f(y)-f(z)|$ だから、$|x-y| < \delta$ のとき

$$|f(x)-f(y)| \leq \sup_{y,z\in I\cap B_\delta(x)} |f(y)-f(z)|$$

となる。これは f は x で連続を意味する。 □
（$\Longleftarrow$ 対偶で）$o(f,x) \neq 0$ とすると、ある $\epsilon > 0$ があって $o(f,x) \geq \epsilon$ である。即ち、任意の $\delta > 0$ に対し $O(f, I\cap B_\delta(x)) \geq \epsilon$ である。これは「ある $\epsilon > 0$ があって任意の $\delta > 0$ に対し $|x-y| \leq \delta$ なる $x, y \in I$ で $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$ となるものがある」ことに相当する。即ち、f は x で連続ではない。 □

(2) $\{x_n\} \subset B$ が x_0 に収束しているとする。x_0 を内部に含む開区間 J をとると、J に含まれるある x_n に対して $o(x_n) \geq \epsilon$ なのだから $O(f,J) \geq \epsilon$ となる。J は任意だったから $o(x_0) \geq \epsilon$、即ち、$x_0 \in B$.

=====================================

$\boxed{2}$ (a)[5] 数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列をなすことの定義を述べよ。
(b)[5] f を $[0,1]$ 上の連続関数とする。この時、 $[0,1]$ 内の任意の Cauchy 列 $\{a_n\}$ に対し $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列をなすことを示せ。
(c)[10] f が $(0,1]$ 上の連続関数の場合、(b) の主張は成立するか。成立する場合はその証明を、成立しない場合は反例をあげよ。
(d)[10] f を $[0,1]$ から $(0,1)$ への関数とし、$(0,1)$ 内の任意の Cauchy 列 $\{a_n\}$ に対し $\{f(a_n)\}$ も Cauchy 列をなすものとする。このとき f は連続関数となるか。正しければその証明を、主張が間違いならば反例をあげよ。

—————————————-

解答例:

(a) 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある数 N があって、 $m, n > N$ なる限り $|a_m - a_n| < \epsilon$ となること。 □

(b) $\{a_n\}$ を $[0,1]$ 内の Cauchy 列とすると、$\{a_n\}$ は $[0,1]$ 内の点 α に収束する。一方、f は $[0,1]$ 上の連続関数だから $f(a_n)$ は $f(\alpha)$ に収束する。故に $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列をなす。 $\square$

(c) 主張は成立しない。実際、$(0,1]$ 上の連続関数 $f(x)=1/x$ に対し、 $a_n=1/n$ ととれ。$\{a_n\}$ は Cauchy 列をなすが $f(a_n)=n$ は $n\to\infty$ の時発散する。 $\square$

(d) 主張は間違いである。例えば

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x=0,\\ \frac{1}{2} & 0<x<1,\\ \frac{1}{3} & x=1\end{cases}$$

とすれば、この関数は明らかに連続ではない。しかし、$\{a_n\}$ を $(0,1)$ 内の任意の Cauchy 列とするとき $f(a_n)=\frac{1}{2}$ は Cauchy 列である。 $\square$

====================================

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-(x+y+z)^2$ の極値を求めよ。

————————————————-

解答例 [25]: 極値点となり得る候補は f の停留点 $\{(x,y,z)\,|\,f_x(x,y,z)=f_y(x,y,z)=f_z(x,y,z)=0\}$ の中にある。簡単な計算で $x=y=z$ かつ $x(2x^2-3)=0$ となる (]5)。即ち、f の停留点は 3 点 $(0,0,0)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}})$ である (]5)。ところで

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z)\\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z)\\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x^2-2 & -2 & -2\\ -2 & 12y^2-2 & -2\\ -2 & -2 & 12z^2-2\end{pmatrix}$$

となるから、

$$\mathrm{Hess}\, f(0,0,0)=2\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathrm{Hess}\, f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})=2\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1\\ -1 & -1 & 8\end{pmatrix}\ (]5).$$

行列 Hess $f(0,0,0)$ は正定値でも負定値でもないから、極値かどうか、これだけでは判定出来ない (]5)。一方、行列 Hess $f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})$ の全ての主小行列式は正であるからこの行列は正定値であり、点 $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})$ は極小値を与えるところである (]5)。 $\square$

最後の部分の別の表現：

$$\det(H_f(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}_3)=-\lambda(\lambda^2+3\lambda+6),$$
$$\det(H_f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})-\lambda\mathbb{I}_3)=-(\lambda-6)(\lambda-9)^2$$

となるから、停留点 $(0,0,0)$ は固有値に 0 を含み、この段階では極値点かどうか判定できない。停留点 $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}})$ はすべての固有値が正だから、狭義極小点である。

注意：前学期の期末試験の解答例でも「極値点かどうかの判定」について付録に述べておいたが、それを再掲しておいた。

====================================

$\boxed{\mathbf{4}}$ (a)[10] 点 $P=(X,Y,Z)$ から定平面 $T_p: \ell x+my+nz=p$ $(\ell^2+m^2+n^2=1)$ への距離 $d((X,Y,Z),T_p)$ を Lagrange 未定乗数法を用いて求めよ。

(b)[15] 点 $P=(X,Y,Z)$ が楕円面 $X^2/a^2+Y^2/b^2+Z^2/c^2=1$ 上を動く時、点 P と定平面 $T_p:\ell x+my+nz=p$ $(\ell^2+m^2+n^2=1)$ の距離の最大値を求めよ。

———————————————-

解答例：(a) 点 $P=(X,Y,Z)$ から定平面 T_p $\ell x+my+nz=p$ への距離を $d_{T_p}(X,Y,Z)=d(P,T)$ と書く。これを Lagrange 未定乗数法で求めよう。このために

$$\Psi(x,y,z:\mu)=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-\mu(\ell x+my+nz-p)$$

とおく。この関数の極値点があれば、そこでは

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}=0$$

となっていなくてはならない。故に、その点で

$$-2(X-x)-\mu\ell=0,\ -2(Y-y)-\mu m=0,\ -2(Z-z)-\mu n=0,\ \ell x+my+nz-p=0$$

となる。最小値が存在しそれが極値点であることは明らかであろう。$\ell^2+m^2+n^2=1$ を用い、

$$X-x=\mu\frac{\ell}{2},\ Y-y=\mu\frac{m}{2},\ Z-z=\mu\frac{n}{2},$$

にそれぞれ ℓ,m,n を掛けたものと、両辺を 2 乗したものを用いると簡単に

$$d_{T_p}(X,Y,Z)=d(P,T)=|p-\ell X-mY-nZ|$$

となる。

(b) 次に、

$$\Phi(X,Y,Z;\lambda)=d_{T_p}(X,Y,Z)^2-\lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right)$$

とおき、上と同様に極値点の候補を求める。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}=\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=\frac{\partial\Phi}{\partial Z}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0$$

となる。その極値点では

$$2\ell(\ell X+mY+nZ-p)-\lambda\frac{2X}{a^2}=0,\ 2m(\ell X+mY+nZ-p)-\lambda\frac{2Y}{b^2}=0,$$
$$2n(\ell X+mY+nZ-p)-\lambda\frac{2Z}{c^2}=0,\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0$$

だから $\ell X+mY+nZ=\gamma$ とおいて

$$\lambda=\gamma(\gamma-p),\gamma-p=\frac{\lambda X}{a^2\ell}=\frac{\lambda Y}{b^2m}=\frac{\lambda Z}{c^2n}$$

となる。故に、$\gamma^2=a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2$ であり、求める量は

$$|p-\gamma|=|p\pm\sqrt{a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2}|$$

となる。この値の大きい方が求めるものとなることは明らかだから、$p>0$ に注意すれば $p+\sqrt{a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2}$ となる。

注意：点から平面までの距離の公式は高校時代に勉強したであろうが、点から平面までの垂線の長さが一番短い、からという考察無しで公式が導かれていることに注意して欲しい。

以下に追試合格者の名前を記す：

大森　仁、藤澤　慎介、工藤　貴礼、高橋　誠志、松岡　祐輝、納田　訓（敬称略）

＝＝＝＝付録：極値点かどうかの判断＝＝＝＝

1 変数関数の場合　：f は 2 階連続微分可能とし $f'(a) = 0$ とする。

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \text{ ならば } & f \text{ は } (a,b) \text{ で極小値をとる、} \\ f''(a) < 0 \text{ ならば } & f \text{ は } (a,b) \text{ で極大値をとる、} \\ f''(a) = 0 \text{ ならば } & \text{ここで極値になるかどうか一般には判定できない。} \end{cases}$$

しかし、f は何回も連続微分可能とするとき、Taylor 展開を用いれば容易に、

$$\begin{cases} f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, 2n-1) \text{ かつ } f^{(2n)}(a) > 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極小値をとる、} \\ f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, 2n-1) \text{ かつ } f^{(2n)}(a) < 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極大値をとる、} \\ f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, 2n) \text{ かつ } f^{(2n+1)}(a) \neq 0 \text{ ならば } f \text{ は } (a,b) \text{ で極値になるかどうか} \\ \hfill \text{一般には判定できない、} \end{cases}$$

ことが分る（即ち、$f'(a) = 0$、$f''(a) = 0$ でも判定できる場合がある）。このような判定条件を 2 変数（以上の）一般の関数に対してどこまで見通し良い形で作ることができるのか？これは煩雑になるだろうと思われるが、私は書いたものを知らない。

2 変数関数の場合　：

定理 0.1 偏導関数が連続な関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値になるとき

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

が成立する。さらに、(a,b) で f の 2 階偏導関数が連続のとき

$$J_f(x,y) = \det H_f(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{yx}(x,y)f_{xy}(x,y), \quad H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

として

$$\begin{cases} J_f(a,b) > 0 \text{ のとき} \begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 \text{ ならば } & f \text{ は } (a,b) \text{ で極小値をとる、} \\ f_{xx}(a,b) < 0 \text{ ならば } & f \text{ は } (a,b) \text{ で極大値をとる、} \end{cases}, \\ J_f(a,b) < 0 \text{ のとき、} f \text{ は } (a,b) \text{ で極値にならない、} \\ J_f(a,b) = 0 \text{ ならば、ここで極値になるかどうか一般には判定できない。} \qquad \square \end{cases} \tag{1}$$

$\boxed{\text{注意}}$ 上の 2 変数の場合の判定条件 1 は Hesse 行列 H_f の固有値がすべて正（極小）か、すべて負（極大）か、正負取り混ぜてあるが 0 はないか、固有値に 0 を含む（まだ判定できない）か、の場合に分けることに相当する。

n 変数関数の場合　：

定義 0.1 $\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{R}$$

に対し、$B=(b_{ij})$ をそれの係数行列という。$Q(x)=(Bx|x)={}^t xBx$ であり、

$$2(Bx|y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$$

が成り立つ。

(i) 0 でない全ての $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $Q(x)>0$ となるとき、Q を正値（正定値）であるという。

(ii) 0 でない全ての $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $Q(x)<0$ となるとき、Q を負値（負定値）であるという。

(iii) ある $x,y\in\mathbb{R}^n$ があって $Q(x)>0>Q(y)$ となるとき、Q を不定符号であるという。

(iv) $\det B\neq 0$ のとき、Q を正則であるという。

定理 0.2 2 次形式 Q と対応する係数行列 B に対し以下の条件 *(a)–(e)* は互いに同値である：

(a) $x=0$ で Q は狭義の最小値 0 をとる。

(b) $x=0$ で Q は狭義の極小値 0 をとる。

(c) Q は正値である。

(d) $B=(b_{ij})$ の固有値はすべて >0 である。

(e) B のすべての主小行列式 D_k は >0 である。即ち、

$$D_k=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk}\end{bmatrix}>0 \quad (1\leq k\leq n).$$

系 0.1 2 次形式 Q と対応する係数行列 B に対し以下の条件 *(i), (ii), (iii)* は互いに同値である：

(i) Q は負値である。

(ii) B の固有値はすべて <0 である。

(iii) B の主小行列式 D_k は $(-1)^k D_k>0$ *(*$1\leq k\leq n$*)* を満たす。

定理 0.3 $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の C^2-級実数値関数 f が、$a\in U$ で $f'(a)=0$ を満たすとする：*(i)* $\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式 $(d^2f)_a$ が正値ならば、a は f の狭義の極小値である。*(ii)* $(d^2f)_a$ が負値ならば、a は f の狭義の極大値である。*(iii)* $(d^2f)_a$ が不定符号ならば、a は f の極値点ではない。

系 0.2 $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の C^2-級実数値関数 f が、$a\in U$ で $f'(a)=0$ を満たすとする：$x\in U$ に対して $f_{jk}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}$ *(*$1\leq j,k\leq n$*)* とおき、

$$D_k(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2k}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x)\end{bmatrix}>0 \quad (1\leq k\leq n)$$

と定義する。このとき、

(i) $D_k(a)>0(1\leq k\leq n)$ ならば a は f の狭義極小点である。

(ii) $(-1)^k D_k(a)>0(1\leq k\leq n)$ ならば a は f の狭義極大点である。

(iii) $D_n(a)\neq 0$ で *(i)* でも *(ii)* でもなければ、f は a で極値をとらない。