解析概論第一期末試験（2005 年 7 月 27 日）井上淳

● 問題は 5 題、答案用紙は 5 枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、裏を使うことを明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）や感想を是非記して下さい（時間がない場合はメールで１週間以内に)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはありません！

==

$\boxed{\mathbf{1}}$ (i) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) < \overline{\lim}_{n\to\infty}a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}b_n$ となる数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ を例示せよ。
(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するならば

$$\overline{\lim}\,(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}b_n$$

が成り立つ事を示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正項級数 $\sum a_n$ が発散するならば、$\displaystyle\sum \frac{a_n}{2005+a_n}$ も発散する事を示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4-(x+y+z)^2$ の極値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ l, m, n, a を与えられた正の数とする。$x,\ y,\ z \geq 0,\ x+y+z=a$ のとき、$x^l y^m z^n$ を最大にする x, y, z の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ (X,d) を完備な距離空間とし、K, L を X 内の空でないコンパクト集合とする：
(a) 関数 $g : K \to \mathbb{R}$ が K の各点で上半連続、即ち、

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(x\in\{y\in K \mid d(y,a)<\delta\} \Longrightarrow g(x)<g(a)+\epsilon)$$

ならば、g は K で最大値を持つことを示せ。
(b) $f : K\times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき $g(x) = \min_{y\in L} f(x,y)$ は K の各点で上半連続なることを示せ。