

## 2004 年度前期解析 A 演習 7

問題 7.1:  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

できめる。  $df(x, y)$  の rank を求めよ。また  $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  を図示せよ。

問題 7.2:  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t = 0 \\ t + 2t^2 \sin \frac{1}{t} & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

できめる。

- (1)  $f$  は  $(-1, 1)$  上微分可能なことを示せ。また  $f'(0)$  を求めよ。
- (2)  $f$  は 0 のどのような近傍でも 1 対 1 ではないことを示せ。

問題 7.3:  $U \subset \mathbb{R}^n$  は開集合、 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $C^1$  写像とする。  $df(x)$  が任意の  $x \in U$  に対して可逆ならば  $f(U) \subset \mathbb{R}^n$  は開集合であることを示せ。

問題 7.4:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^y \sin y)$$

できめる。

- (1)  $f$  は  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y < \pi\}$  で 1 対 1 であることを示せ。
- (2)  $g$  を  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  の逆写像とする。  $dg(0, 1)$  を求めよ。

問題 7.5:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

できめる。

- (1)  $df(x, y)$  が可逆となる点  $(x, y)$  を求めよ。
- (2)  $f(1, 0) = (1, 0)$  の近傍で定義された  $f$  の逆写像を求めよ。

問題 7.6:  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$g(x, y) = (y \cos x, (x + y) \sin y), \quad f(x, y) = (x^2 - y, 3x - 2y, 2xy + y^2)$$

できめる。

- (1)  $g$  は  $(0, \pi/2)$  のある近傍から  $(\pi/2, \pi/2)$  のある近傍への全単射的であることを示せ。
- (2)  $h = f \circ g^{-1}$  ときめるとき、  $h'(\pi/2, \pi/2)$  を求めよ。

問題 7.7: 次の方程式を考える。

$$\begin{cases} uz - 2e^{vz} & = 0 \\ u - x^2 - y^2 & = 0 \\ v^2 - xy \log v - 1 & = 0 \end{cases}$$

この方程式を満たす  $z$  は、  $z = 2$  の近傍で、  $(x, y) = (0, e)$  の近傍上定義された関数  $z(x, y)$  を用いて  $z = z(x, y)$  と書けることを示せ。また  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, e)$  を求めよ。