2004 年度前期解析Ａ１の補足

問題 1.17 : $X \subset \mathbb{R}$ が有界な閉集合ならば最大値、最小値を持つことを示せ。すなわち $\sup X, \inf X \in X$ を示せ。

問題 1.18 : $X \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\inf X = \inf \overline{X}, \quad \sup X = \sup \overline{X}$$

を示せ。

問題 1.19 : (X,d) を距離空間とする。$x, y \in X$ に対して $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ときめる。

(1) ρ は X 上に距離をきめることを示せ。

(2) 列 $\{x_n\} \subset X$ に対して $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$ は $\rho(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$ と同値であることを示せ。ただし $x \in X$.

問題 1.20: (X,d) は距離空間とする。Caucy 列 $\{a_n\} \subset X$ のある部分列 $\{a_{n_k}\}$ が収束するとする。このとき $\{a_n\}$ は収束することを示せ。

問題 1.21: (X,d) は距離空間とする。X の閉集合 $F \subset X$ が至るところ非稠密であることと、F^c が X の稠密な部分集合であることは同値であることを示せ。

問題 1.22: $\mathbb{R}$ は距離 $d(x,y) = |x-y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に関して完備距離空間になる。

(1) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において第１類集合であることをしめせ。

(2) 無理数全体のなす集合は $\mathbb{R}$ において第２類集合であることを示せ。

問題 1.23: 距離空間 (X,d) の点からなる列 $\{a_n\}$ を考える。つぎを示せ。

(1) $\{a_n\}$ が $\alpha \in X$ に収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ の任意の部分列が α に収束することである。

(2) $\{a_n\}$ が α に収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}$ に対して、$\alpha \in \overline{\{a_{n_k}\}}$ である。