

解析概論 I 第 1 回演習：知識の確認問題 (特に極限、微分)

(2004 年 4 月 16 日) 井上・磯部

問題 0: n を 2 より大きな偶数とし、曲線 $C_1: y = x^n$ と $C_2: y = n^x$ を定める。

- (1) C_1 と C_2 の $x < 0$ における交点 P_n は唯一つである。
- (2) C_1 と C_2 の $x > 0$ における交点の個数は幾つか?
- (3) P_n の $n \rightarrow \infty$ での極限はどうなるか?

問題 1: 『0.999... は 1 の“直前の数”である¹』という疑問を解明せよ。[ヒント: もしある数 α が 1 の“直前の数”であるとすると、数 $(1 + \alpha)/2$ はどのような性質を持つか?]

問題 2: $[a, b]$ 上で連続な関数 f が、関数等式 $2f((x+y)/2) = f(x) + f(y)$ を満たすとき、 f は x の 1 次式なることを示せ。(ヒント: もし $f(b) = f(a)$ ならば $g(x) = f(x) - f(a)$ とおくと、 $g(a) = g(b) = 0$ であり $g((a+b)/2) = 0$ となる。繰り返すと...)

問題 3: $|c| < 1$ ならば、任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} e^{nz}$ は絶対収束する。

問題 4: $f(x) = e^{-1/x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ で定義された関数は、 $x = 0$ で無限回微分可能であるが、そのまわりで Taylor 展開できない。

=====

正項級数の収束判定法

定理 0.1 (比較判定法) $a_n, b_n > 0$ とし、ある定数 $K > 0$ があって $a_n \leq Kb_n$ が十分大きな n に対して成立するとする。このとき、 $\sum b_n$ が収束するならば、 $\sum a_n$ も収束する。対偶をとれば、 $\sum a_n$ が発散するならば $\sum b_n$ も発散する。

特に $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = \rho$ が存在して、 $0 < \rho < \infty$ のとき $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束、発散する。

系 0.1 (Cauchy の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r \text{ が存在するとする} \implies \begin{cases} \text{もし } 0 \leq r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

系 0.2 (d'Ambert の判定法) 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ が存在するとする} \implies \begin{cases} \text{もし } 0 \leq r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

¹0.999... は 1 よりほんのちょっと小さいように感じられるのだが?