

問題は4題、答案用紙は4枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、裏を使うことを明記し、裏にも解答して良い。

授業や演習に関する物言い(助言、苦情等)感想を是非記して下さい。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはありません!

=====

数学の試験とは、自由な考えで課題に答えて良いものである。勿論、「誰かさんの答を写しておく」等は禁じ手である。

認知された定理名¹を挙げ、正しい使い方²をして、望みの結論を導いている答案を期待する。勿論これを説明せよという問題に対して、これは誰々の定理から明らかというような解答は、問題の出題意図がその誰々の定理の特別な場合の直接的な証明を求めているか、その誰々を特定しろという意図なのか、判断を間違うと国語力欠如と見なされる。

試験の出来栄については「時の運」であり、自分の理解の状態を調べる一つの方法でしかない、と思っ
て欲しいものである。これから君たちが立ち向かう「創造」の世界は内容が新しければ新しい程、君たち自身の「理解」にのみ依るのだから!試験時間は少ないが、この試験問題で「あっ、分かった」を経験することを期待する。もし試験が易しすぎた場合は「あっ、そう」としかならないので、そのような諸君には済まないが差し当たり辛抱して欲しいし、その旨注文をつけて欲しい。

=====

1 数列 s_n に対して $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$ の定義を述べよ。正項級数 $\sum a_n$ は、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) > 1$ ならば収束する事を示せ。

2 距離空間でのコンパクト集合の定義を述べよ。 $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、 $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ が連続で1:1ならば、逆関数 $f^{-1}: f(K) \rightarrow K$ も連続である事を示せ。

3 円周を $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし、関数 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ が連続とする。このとき必ず C のある直径が存在して、その両端での f の値が一致する事を示せ。

4 空でない $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対しその間の距離を $d(A, B) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in A, y \in B\}$ と定める。但し、 $x = {}^t(x_1, \dots, x_n), y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ に対し $\|x - y\| = (\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2)^{1/2}$ と定めた。

(i) A, B が共にコンパクト集合ならば $d(A, B) = d(a, b)$ となる $a \in A, b \in B$ が存在する事を示せ。

(ii) $A \cap B = \emptyset$ かつ $d(A, B) = 0$ なるコンパクトでない閉集合 A, B を $n = 2$ の場合に構成せよ。

¹ (講義で説明されていなくても) 定理の内容を叙述し、必要に応じて証明を与えてあれば「認知された」こととする

² 定理の仮定が満たされていることを示しているか、がポイント