「解析概論第１中間試験問題解答例と注意等」　井上 revised 7.20

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 s_n に対して $\liminf_{n\to\infty} s_n$ の定義を述べよ。正項級数 $\sum a_n$ は、$\liminf_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1}-1)>1$ ならば収束する事を示せ。

証明：[2] 数列 s_n に対して $\underline{s}_n=\inf_{k\geq n} s_k$ と定義すると $\{\underline{s}_n\}$ は単調増加数列である（<u>ここ書き換えた !</u>)。故に、補完実数 $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\pm\infty$ 内では極限 $\lim_{n\to\infty}\underline{s}_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\underline{s}_n\geq-\infty$ を持つので、それを下極限といい $\liminf_{n\to\infty} s_n$ と書いた。

この定義では分かりにくいし使いにくいので、いくつか別の表現をしよう。まずは簡単のために、数列は下に有界の場合を考えよう。

● ある数 $\beta\in\mathbb{R}$ が数列 s_n の下極限とは、

(i) 任意の $\epsilon>0$ に対しある数 n_0 があって $n\geq n_0$ ならば、$\beta-\epsilon<s_n$、

(ii) 任意の $\epsilon>0$ に対し無限個の番号 $\{n_1,n_2,\cdots\}$ があって $s_{n_k}<\beta+\epsilon$ となる、ことである。

● $\beta=\liminf_{n\in\mathbb{N}} s_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{k\geq n} s_k)$ とは

$$\beta=\sup_{n\in\mathbb{N}}\underline{s}_n \Longleftrightarrow \forall\epsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N}, \underline{s}_n\leq\beta\ \&\ \forall' n\in\mathbb{N}, \underline{s}_n>\beta-\epsilon,$$
$$\underline{s}_n=\inf_{k\geq n} s_k \Longleftrightarrow \forall\epsilon>0,\ n<\exists k\in\mathbb{N}, s_k<\underline{s}_n+\epsilon\ \&\ \forall k\geq n, \underline{s}_n\leq s_k$$

のことである。これより、

$$\beta=\liminf_{n\in\mathbb{N}} s_n \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\text{任意の } \epsilon>0 \text{ に対して } \{n\in\mathbb{N}\mid s_n<\beta-\epsilon\} \text{ は高々有限集合であり、}\\ \{n\in\mathbb{N}\mid s_n<\beta+\epsilon\} \text{ は無限集合である.}\end{pmatrix}$$

——

ここで $\forall' n\in\mathbb{N}$ とは「ほとんどすべての」と読む。$\forall' n\in\mathbb{N}$ とは、有限個を除く、つまりある十分大きい $N\in\mathbb{N}$ に対して N 以下のものを除く全ての自然数ということ。この表現を使うと、

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Longleftrightarrow (\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ n\geq N\Longrightarrow |a_n-a|\leq\epsilon)$$
$$\Longleftrightarrow \forall\epsilon>0,\ \forall' n\in\mathbb{N},\ a_n\in U_\epsilon(a)$$

——

● （下に有界でないときも含めると）ある数 $\beta\in\bar{\mathbb{R}}$ が数列 s_n の下極限とは、

(i) $\beta>x$ となる任意の $x\in\bar{\mathbb{R}}$ を定めたとき、十分大きなすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $s_n>x$ となる。

(ii) $\beta<y$ となる任意の $y\in\bar{\mathbb{R}}$ に対し、$y>s_n$ となる $n\in\mathbb{N}$ は無限に存在する。

———-

[3] 書き直すと、仮定から、ある $\delta>0$ があって

$$n(a_n/a_{n+1}-1)-1=\frac{a_n}{a_{n+1}}n-(n+1),\quad \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}n-(n+1)\right)>\delta>0$$

となる。その $\delta>0$ に対してある数 n_0 があって $n\geq n_0$ のとき

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}n-(n+1)>\delta\Longrightarrow a_{n+1}<\delta^{-1}(a_nn-a_{n+1}(n+1))$$

となる。任意の $N \geq n_0$ に対して

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} a_n < \delta^{-1}(a_{n_0}n_0 - a_N N) < \delta^{-1}a_{n_0}n_0$$

となるから、$\sum a_n$ の部分和の列は有界である。故に、正項級数 $\sum a_n$ は収束する。 $\square$

———-

別証：もし $c > 0$ があって

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + c$$

となるとする。定数 $A > 0$ を任意に決め $v_n = An^{-1-c/2}$ とすると

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-1-c/2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+c/2} = 1 + \frac{1+c/2}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる。これより

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) = 1 + c/2$$

となる。そこで仮定より n_0 があって $n \geq n_0$ に対して

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

故に $n \geq n_0$ のとき $a_n < v_n$ ならば

$$a_{n+1} = a_n\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq v_n\frac{v_{n+1}}{v_n} = v_{n+1}$$

となる。そこで $A = \max_{n\leq n_0} a_n n^{-1-c/2}$ と定めると、$\sum v_n$ が収束するので $\sum a_n$ は収束する。 $\square$

———

注意：（Kummer の判定法）一つの正項数列 $\{b_n\}$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}\right) > 0$$

となるならば、正項級数 $\sum a_n$ は収束する（この判定法で $b_n = 1$ としたものが d'Alembert の判定法、$b_n = n$ のときが問題に出した Raabe の判定法になる）。もし

$$\sum \frac{1}{b_n} = +\infty, \quad \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}b_n - b_{n+1}\right) < 0$$

ならば、正項級数 $\sum a_n$ は発散する。

注意：以下のような解答が多く見られた。

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \qquad (n \geq N) \Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{n} + 1$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} > \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 1\right) = 1 \quad (\text{ここの} > \text{は間違いで} \geq \text{である})$$

である。故に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad (\text{ここの} < \text{は間違いで} \leq \text{である})$$

となり、d'Alembert の収束判定法[1]から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する。

=====

$\boxed{\mathbf{2}}$ 距離空間でのコンパクト集合の定義を述べよ。$K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、$f : K \to \mathbb{R}^m$ が連続で 1:1 ならば、逆関数 $f^{-1} : f(K) \to K$ も連続である事を示せ。

証明：[2] 距離空間 X における部分集合 A の任意の開被覆から有限個の部分被覆がとれるとき、A をコンパクトであるという。

[3] $f(K)$ 内の数列 $y_n = f(x_n)$ が b に収束するとき、$f^{-1}(y_n)$ が $f^{-1}(b)$ に収束することを言えば良い。

K はコンパクトだから部分列があって $x_{n'} \to a \ (a \in K)$ とできる。故に、f の連続性より $y_{n'} = f(x_{n'}) \to f(a) = b$ となる。別の任意の収束する部分列を $x_{n''} \to a' \ (a' \in K)$ とすると $y_{n''} = f(x_{n''}) \to f(a') = b$ となるが、f が 1:1 なることより $a = a'$ となる。任意の収束する部分列が同じ極限に収束するので、$\liminf x_n = \limsup x_n$ となり、x_n 自身が a に収束する。即ち、$x_n = f^{-1}(y_n) \to a = f^{-1}(b)$. □

整理が必要な幾つかの注意[2]：X, Y を距離空間とするとき、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が } A \subset X \text{ から } B \subset Y \text{ への連続関数} &\iff (O \text{ を } B \text{ の任意の開集合} \implies f^{-1}(O) \text{ は } A \text{ の開集合}) \\
&\iff (F \text{ を } B \text{ の任意の閉集合} \implies f^{-1}(F) \text{ は } A \text{ の閉集合})
\end{aligned}
$$

更に、

f が X から Y への連続関数で、K が X のコンパクト集合 $\Longrightarrow f(K)$ は Y のコンパクト集合である

=======

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円周を $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし、関数 $f : C \to \mathbb{R}$ が連続とする。このとき必ず C のある直径が存在して、その両端での f の値が一致する事を示せ。

証明：[5] 円周上に任意の点を固定し、そこから弧度 $\theta \in [0, 2\pi]$ なるパラメター表示で円周を表し、関数 f を $f(\theta)$ で書くと、$f(0) = f(2\pi)$ を満たしている。$g(\theta) = f(\pi + \theta) - f(\theta) \ (0 \le \theta \le \pi)$ とおくと、

$$
g(0) = f(\pi) - f(0), \ g(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) = f(0) - f(\pi) = -g(0)
$$

となる。$g(0) \neq 0$ ならば、$g(0)g(\pi) < 0$ で g は連続であるから, 中間の値である $0 \in [0, \pi]$ をとる θ がある。勿論、$g(0) = 0$ ならば、$\theta = 0$ を起点とする直径が存在して、その両端での f の値が一致する。 □

========

$\boxed{\mathbf{4}}$ 空でない $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対しその間の距離を $d(A, B) = \inf\{|x - y| \mid x \in A, \, y \in B\}$ と定める。

(i) A, B が共にコンパクト集合ならば $d(A, B) = |a - b|$ となる $a \in A, \, b \in B$ が存在する事を示せ。

(ii) $A \cap B = \emptyset$ かつ $d(A, B) = 0$ なるコンパクトでない閉集合 A, B を $n = 2$ の場合に構成せよ。

証明：(i)[2] $d(A, B)$ の定義（下限をとっている）から $\exists (x_n, y_n) \in A \times B$ かつ $|x_n - y_n| \to d(A, B)$ となる。A, B が共にコンパクト集合だから、部分列をとれば $a \in A, \, b \in B$ があって $x_{n'} \to a, \ y_{n'} \to b$ となる。距離関数 $|\cdot - \cdot|$ は連続だから $\lim_{n' \to \infty} |x_{n'} - y_{n'}| = |a - b|$ となる。故に $d(A, B) = |a - b|$ が従う（勿論、こうなる点 (a, b) が唯一組とは限らない）。

[1]これは適用できない場合なのに気楽に適用している !?
[2]すべて証明すべき事柄である

別証明:$d(x,y)$ は 2 変数 x, y に関して連続関数であり、集合 $A\times B$ はコンパクトだから、その上で最小値を持つ、即ち、$a\in A, b\in B$ があって $d(A,B)=\inf\{|x-y| \mid x\in A,\, y\in B\}=\min\{|x-y| \mid x\in A,\, y\in B\}=|a-b|$ が従う。

(ii)[3] $A=\{(x,y) \mid xy=1\}$, $B=\{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$ とせよ。これらが閉集合であり、$A\cap B=\emptyset$ なることは明らかであろう。また B は A の漸近線であるから $\lim_{x\to\infty}|(x,\frac{1}{x})-(x,0)|=0=d(A,B)$. □

注意：この問題 (ii) の解答の中で、例をつくるとき、「閉集合とか開集合」の性質が誤解されているようなので以下に幾つかの注意を述べておく。

定理 0.1 任意個数（有限でも無限でも）の閉集合の共通部分は閉集合である。任意個数（有限でも無限でも）の開集合の和集合は開集合である。

証明：A_α を閉集合とし、$A=\cap_\alpha A_\alpha$ と書く。$a\in\bar{A}$ とすると、任意の $\epsilon>0$ に対して a の近傍 $U_\epsilon(a)$ をとると、閉包の定義から $A\cap U_\epsilon(a)\neq\emptyset$ である。任意の α に対して $A\subset A_\alpha$ だから、$A_\alpha\cap U_\epsilon(a)\neq\emptyset$ となるから、$\bar{A}_\alpha$ の定義より $a\in\bar{A}_\alpha$ であり $A\in A_\alpha$ となる。$a\in\cup A_\alpha$ で A_α は閉集合だから、$a\in\cap_\alpha A_\alpha$、$a\in A$ である。即ち、$\bar{A}\subset A$ となる。 □

定義 0.1 可算個の開集合の共通部分は G_δ 集合、可算個の閉集合の和集合は F_σ 集合という。

定理 0.2 $A\subset X$ 及び $\epsilon>0$ に対して、A の ϵ 近傍を $U(A;\epsilon)=\{x\in X \mid d(x,A)<\epsilon\}$ とすると、これは A を含む開集合で

$$U(A;\epsilon)=\cup_{a\in A}U_\epsilon(a),\quad \bar{A}=\cap_{\epsilon>0}U(A;\epsilon).$$

問題：この定理の証明を与えよ。

系 0.1 距離空間では、A が閉集合ならば、

$$A=\cap_{m=1}^{\infty}U(A;1/m)$$

と、可算個の開集合の共通部分としてあらわされる。

注意：「集合と位相」の講義で距離空間より一般の位相空間を学ぶ。そこでは、『閉集合は必ずしも可算個の開集合の共通部分としてあらわされない』集合が出現するので G_δ 集合という概念が意味を持つ。

＝＝＝＝＝＝

メモ：以下の諸君は素晴らしい出来でした。

古賀智裕、谷本祥、阿部直、福富平記（敬称略）