「解析概論第１期末試験問題」　7 月 23 日, W323, pm 1.20–pm 4.20,　井上

● 問題は５題、答案用紙は４枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい（試験後１週間以内に e-mail で私宛に送っても良い)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはありません！

＝＝＝＝＝＝

1 (a) K を $\mathbb{R}$ 内の空でないコンパクト集合で、関数 $g: K \to \mathbb{R}$ が K の各点 $a \in K$ で上半連続、即ち、

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(x \in \{y \in K \mid |y-a| < \delta\} \Longrightarrow g(x) < g(a) + \epsilon)$$

ならば、g は K で最大値を持つことを示せ。
(b) $K \subset \mathbb{R},\ L \subset \mathbb{R}$ を共に空でないコンパクト集合とし、$f : K \times L \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき $g(x) = \min_{y \in L} f(x, y)$ は K の各点で上半連続なることを示せ。

2 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする。

（い）$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する事を示せ。

（ろ）$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ ならば $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$ を示せ。

（は）$a_n > 0,\ b_n > 0$ ならば $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$ という主張は正しいか？正しければ証明を、正しくなければ反例を挙げよ。

3 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^2-級で $f(0) = 0$ を満たすものとする。このとき関数を

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

と定義すると、$g \in C^1$ であることを示せ。

4 (a) 点 $P = (X, Y, Z)$ から定平面 $T_p : \ell x + my + nz = p$ $(\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, p > 0)$ への距離 $d((X, Y, Z), T_p)$ を Lagrange 未定乗数法を用いて求めよ。
(b) 点 $P = (X, Y, Z)$ が楕円面 $X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1$ 上を動く時、点 P と定平面 $T_p : \ell x + my + nz = p$ $(\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, p > 0)$ の距離の最大値を求めよ。

5 長さ ℓ の単振子の周期 T は、$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ (g は重力加速度) で与えられる。このとき ℓ と T の測定値から、g の値を求めることを考える。もし、ℓ と T の測定誤差がそれぞれ 1%, 2% 以下ならば、g の測定誤差はほぼ 5% 以下に押さえられることを示せ。

＝＝＝

注意：補完実数 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ の中での $\pm\infty$ を含んだ演算は以下のごとく定める：

$$(\pm\infty) + a = \pm\infty, \quad a + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty) - a = \pm\infty, \quad a - (\pm\infty) = \mp\infty, \ (-\infty < a < \infty)$$

$$a\cdot(\pm\infty) = (\pm\infty)\cdot a = \begin{cases} \pm\infty & (\infty > a > 0 \text{ のとき}), \\ \mp\infty & (-\infty < a < 0 \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty.$$

これら以外の演算、例えば $(\pm\infty) - (\pm\infty)$,　$(\pm\infty) + (\mp\infty)$ は定義しない。